Глава 2

Плоские разрезания

Задачи на разрезание считаются одними из самых увлекательных головоломок в занимательной математике, возможно, потому, что они весьма разнообразны, достаточно трудны и в то же время общедоступны, так как не требуют никакой специальной подготовки. И конечно же, многие из задач на разрезание правильных фигур очень красивы, так как наглядно демонстрируют четкие количественные связи между формами и размерами этих фигур, обусловленные их симметрией.

В этих задачах требуется разрезать данную плоскую фигуру на части, из которых можно сложить другую, уже заданную плоскую фигуру так, чтобы обе фигуры были равносоставленными, т. е. состояли из неперекрывающихся частей без свободных промежутков. При этом очень важно, чтобы число частей было как можно меньше, так как строго доказано, что любой многоугольник можно, разрезав на конечное число частей, преобразовать в любой другой многоугольник, равновеликий исходному. Именно поэтому интересны лишь экономичные решения. Однако только в редких случаях можно строго доказать, что найденное число частей или разрезов является наименьшим.

Таким образом, некоторые решения задач, рассматриваемых ниже, возможно, являются не самыми лучшими, что может служить еще одним фактором привлекательности этих задач для широкой аудитории, так как оставляет обширное поле для творчества. Кроме задач на разрезание, в которых одни фигуры преобразуются в другие, существуют задачи, в которых требуется заданные фигуры разрезать на наименьшее число других фигур, ничего при этом не складывая из последних.

Наиболее красивыми и интересными задачами являются такие, в которых преобразуются друг в друга правильные многоугольники. Очевидно, что путеводной звездой в решении задач на разрезание правильных многоугольников является их симметрия. Существуют и менее общие, конкретные методы решения задач на разрезание многоугольников, например метод наложения полос из элементов преобразуемых многоугольников, о котором будет рассказано в конце этой главы.

Абсолютное большинство разрезаний обратимо, т. е. если с помощью некоторых разрезов фигуру A можно преобразовать в фигуру B, то возможно и обратное преобразование фигуры B в A с помощью тех же разрезов. Эта обратимость предполагается во всех последующих задачах, хотя для определенности в условии предлагается не взаимное преобразование, а преобразование одной из фигур в другую.

Несимметричные части, полученные при разрезании одних фигур для составления новых фигур, можно переворачивать, однако решения без переворачиваний считаются лучшими.

Во многих задачах для решения требуется найти сторону одной из правильных фигур по стороне другой фигуры. Это можно сделать, используя равновеликость преобразуемых многоугольников или воспользовавшись формулами площадей и сторон правильных многоугольников, выраженных через радиусы вписанных и описанных около них окружностей.

Во второй половине XX века рекорды по разрезанию правильных многоугольников были такими:

Многоугольник	Треугольник	Квадрат	5-угольник	6-угольник	7-угольник	8-угольник
Квадрат	4	–	6	5	9	5
Пятиугольник	6	6	–	7	11	9
Шестиугольник	5	5	7	–	11	9
Семиугольник	9	9	11	11	–	13
Восьмиугольник	8	5	9	9	13	–
Девятиугольник	9	12	н. д.	14	н. д.	н. д.
Десятиугольник	8	8	10	9	13	12
Двенадцатиугольник	8	6	н. д.	6	н. д.	н. д.

169. *Прямоугольник 4 × 9 и квадрат.*

Как разрезать прямоугольник со сторонами 4 × 9 на минимальное число частей, чтобы из них сложить квадрат?

с. 140

170. *Возможность ступенчатого преобразования.*

При каком условии с помощью ступенчатого разреза возможно преобразование прямоугольника и квадрата?

с. 141

171. *Прямоугольник 1 × 2 и квадрат.*

Как разрезать прямоугольник с отношением сторон 1 : 2 (или чуть больше, или немного меньше) на минимальное число частей, чтобы из них сложить квадрат? Эту и несколько последующих головоломок можно сформулировать иначе: как разрезать *n* одинаковых квадратов наилучшим образом, т. е. на наименьшее число частей, чтобы преобразовать их в один равновеликий квадрат?

с. 141

172. *Прямоугольник 1×3 и симметричное преобразование в квадрат.*

Как симметрично разрезать прямоугольник со сторонами 1×3 на 9 частей, чтобы из них сложить квадрат?

с. 142

173. *Прямоугольник 1×3 и квадрат.*

Как разрезать прямоугольник со сторонами 1×3 на минимальное число частей так, чтобы из них сложить квадрат?

с. 142

174. *Прямоугольник 1×5 и квадрат.*

Как разрезать прямоугольник со сторонами 1×5 на минимальное число частей так, чтобы из них сложить квадрат?

с. 142

175. *Греческий крест и квадрат.*

Разрезать греческий крест так, чтобы из кусочков можно было сложить квадрат:

а) четырьмя прямыми линиями, используя центральную симметрию;

б) двумя прямыми линиями.

с. 143

176. *Латинский крест и квадрат.*

Разрезать латинский крест на минимальное число частей так, чтобы сложить квадрат.

с. 143

177. *τ-крест и квадрат.*

Разрезать τ-крест (русская буква «Т», у которой вертикальная и горизонтальная части равны) на минимальное число частей так, чтобы сложить квадрат.

с. 143

178. *Прямоугольник и треугольник.*

Разрезать прямоугольник на наименьшее число частей, из которых можно сложить остроугольный треугольник.

с. 144

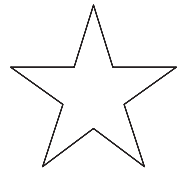
179. *Треугольник в треугольниках.*

Разрезать остроугольный и тупоугольный треугольники на наименьшее число остроугольных треугольников.

с. 144

180. *Пентаграмма в треугольниках.*

Разрезать пентаграмму (пятиугольную звезду) на наименьшее число остроугольных треугольников.



с. 144

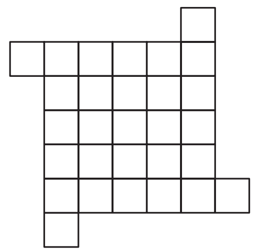
181. *Квадрат в треугольниках.*

Разрезать квадрат на наименьшее число остроугольных треугольников.

с. 144

182. *Квадрат с выступами в квадрате.*

Разрезать изображенный на рисунке квадрат с выступами на наименьшее число частей и сложить равновеликий квадрат.



с. 145

183. *Два квадрата в одном.*

Разрезать два произвольных квадрата на наименьшее число частей, чтобы сложить равновеликий квадрат.

с. 145

184. *Один разрезанный квадрат из двух в квадрате.*

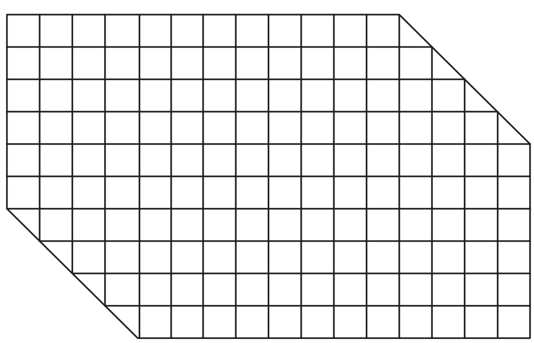
Разрезать только один из двух произвольных квадратов так, чтобы из полученных частей сложить равновеликий квадрат.

с. 145

185. *Прямоугольник без углов и квадрат.*

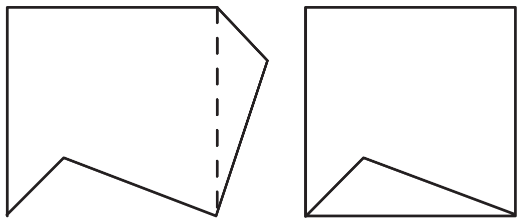
Разрезать прямоугольник без двух углов, изображенный на рисунке, на наименьшее число частей так, чтобы из них сложить квадрат.

с. 145



186. *Фигура с «зубом» и квадрат.*

Фигура, изображенная на рисунке, получена из квадрата путем вырезания от одной из сторон треугольного «зуба» и «прилаживания» его к другой стороне. Поэтому эту фигуру легко превратить в квадрат, произведя обратные действия, т. е. отрезав по пунктирной линии выпирающий треугольник и вложив его в соответствующую ему нишу.



Как преобразовать левую фигуру в квадрат, разрезав ее на две части иным образом?

с. 146

187. *Два квадрата из клеток, разрезанные по линиям клеток в одном.*

Разрезать два квадрата из клеток 12×12 и 5×5 по контурам (линиям) клеток на наименьшее число частей так, чтобы составить квадрат 13×13.

с. 146

188. *Шестиконечная звезда и треугольник.*

Разрезать правильную шестиконечную звезду на наименьшее число частей так, чтобы составить правильный треугольник.

с. 146

189. *Шестиконечная звезда и квадрат.*

Разрезать правильную шестиконечную звезду на наименьшее число частей так, чтобы составить квадрат.

с. 147

190. *Две шестиконечных звезды и шестиугольник.*

Разрезать правильный шестиугольник на наименьшее число частей так, чтобы составить две шестиконечных звезды.

с. 147

191. *Две разрезанные из трех шестиконечных звезд в одной.*

Разрезать две из трех шестиконечных звезд на наименьшее число частей так, чтобы составить шестиконечную звезду.

с. 147

192. *Три шестиконечных звезды в одной.*

Разрезать три шестиконечных звезды на наименьшее число частей так, чтобы составить шестиконечную звезду.

с. 147

193. *Три шестиконечных звезды, разрезанные на части двух типов, в одной звезде.*

Разрезать три шестиконечных звезды на наименьшее число частей так, чтобы составить шестиконечную звезду, при этом все разрезанные части должны быть только двух типов.

с. 147

194. *Семиконечная звезда и два семиугольника.*

Разрезать правильную семиконечную звезду на наименьшее число частей так, чтобы сложить два одинаковых правильных семиугольника.

с. 148

195. *Восьмиконечная звезда, разрезанная на части двух типов, и квадрат.*

Разрезать правильную восьмиконечную звезду на наименьшее число частей так, чтобы сложить квадрат; при этом все разрезанные части должны быть только двух типов.

с. 148

196. *Восьмиконечная звезда и квадрат.*

Разрезать правильную восьмиконечную звезду на наименьшее число частей так, чтобы сложить квадрат.

с. 148

197. *Восьмиконечная звезда и восьмиугольник.*

Разрезать восьмиконечную звезду на наименьшее число частей так, чтобы сложить правильный восьмиугольник.

с. 148

198. *Два равных пятиугольника в одном.*

Разрезать два равных правильных пятиугольника на наименьшее число частей так, чтобы сложить правильный пятиугольник.

с. 148

199. *Два разных пятиугольника в одном.*

Разрезать два разных правильных пятиугольника на наименьшее число частей так, чтобы сложить правильный пятиугольник.

с. 149

200. *Пять пятиугольников в одном.*

Разрезать пять равных правильных пятиугольников на наименьшее число частей так, чтобы сложить один правильный пятиугольник.

с. 149

201. *Два шестиугольника со сторонами 3 и 4 сантиметра в одном.*

Разрезать два правильных шестиугольника со сторонами 3 и 4 сантиметра на наименьшее число частей так, чтобы сложить правильный шестиугольник.

с. 149

202. *Два восьмиугольника, разрезанных пятью разрезами, в одном.*

Разрезать два равных правильных восьмиугольника пятью прямолинейными разрезами так, чтобы сложить правильный восьмиугольник.

с. 149

203. *Два восьмиугольника, разрезанных двумя разрезами, в одном.*

Разрезать два равных правильных восьмиугольника двумя прямолинейными разрезами так, чтобы сложить правильный восьмиугольник.

с. 150

204. *Восемь восьмиугольников в одном.*

Разрезать восемь правильных равных восьмиугольников на наименьшее число частей так, чтобы сложить один правильный восьмиугольник.

с. 150

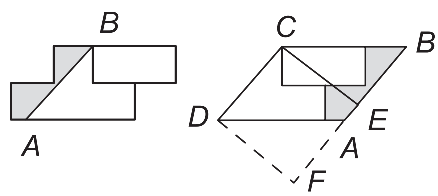
205. *Двенадцатиугольник и квадрат.*

Разрезать правильный двенадцатиугольник на наименьшее число частей так, чтобы сложить квадрат.

с. 150

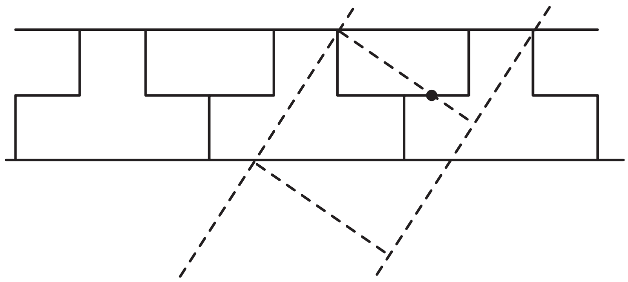
206. *Пятиугольник и квадрат.*

Вероятно, прилежный читатель получил достаточно удовольствия от процесса решения головоломок, связанных с разрезаниями многоугольников, и настала пора взглянуть на эти головоломки как на задачи, т. е. сконструировать более или менее общий метод решения задач на преобразование многоугольников друг в друга посредством разрезаний.



Задачи на разрезания можно считать задачами на наложение, в которых один из многоугольников разрезается на части и эти части складываются так, чтобы их уложить (или наложить) в иную рамку, которая может быть промежуточной. Так, например, в разобранной ранее задаче о преобразовании латинского креста в квадрат его сначала разрезали так, что «уложили» в промежуточную рамку параллелограмма $DCBE$, а затем на эту промежуточную рамку наложили конечную рамку квадрата $DCEF$.

Осталось обобщить это решение. Многоугольник, преобразуемый, например, в квадрат, надо разрезать так, чтобы поместить его в параллелограмм и наложить квадрат. При этом для минимизации числа разрезанных частей удобно взять не единичные параллелограмм и квадрат, а несколько расположенных на двух полосах. Тогда эти полосы можно двигать относительно друг друга (как поступательно, так и вращать), добиваясь лучшего решения.



Для того чтобы число разрезанных частей было минимально, линии внутри двух полос должны иметь минимум точек пересечения. На рисунке такая точка, выделенная жирным, одна, но если полосу квадратов поступательно сдвинуть, то точек может стать несколько и решение перестанет быть лучшим.

Преобразовать правильный пятиугольник в квадрат так, чтобы число разрезанных частей было наименьшим. Можно сначала попытаться это сделать с помощью догадки, т. е. методом проб и ошибок, а при неудаче применить метод наложения полос.

с. 150

207. *Шестиугольник и квадрат.*

Преобразовать правильный шестиугольник в квадрат так, чтобы число разрезанных частей было наименьшим.

с. 151

208. *Восьмиугольник и квадрат.*

Большинство предложенных ранее головоломок достаточно легко решается с помощью двухполосного метода наложения. Однако этот метод отнюдь не всегда приводит к желаемому результату. Например, преобразование правильного восьмиугольника в квадрат, вероятно, легче сделать с помощью метода проб и ошибок, используя симметрию восьмиугольника, чем методом наложения двух полос.

Можно воспользоваться еще одним методом решения задач на разрезание. Суть этого очень наглядного и простого метода, позволяющего решать весьма трудные задачи о преобразовании правильных многоугольников, — в наложении двух подходящих (обычно полуправильных) мозаик.

Итак, как преобразовать правильный шестиугольник в квадрат так, чтобы число разрезанных частей было наименьшим?

с. 151

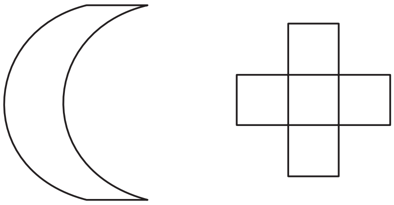
209. *Двенадцатиугольник и шестиугольник.*

Разрезать правильный двенадцатиугольник на наименьшее число частей так, чтобы сложить правильный шестиугольник.

с. 151

210. *Греческий крест и полумесяц.*

Разрезать греческий крест на наименьшее число частей так, чтобы сложить полумесяц, образованный двумя одинаковыми дугами окружностей и двумя одинаковыми отрезками прямых линий.



с. 152