

8. Планиметрия

8.1. Треугольники

8.1.1. *Многоугольник (n -угольник)* — замкнутая ломаная без самопересечений, состоящая из n отрезков и n ограничивающих их точек, вместе с конечной частью плоскости, ограниченной ею. Отрезки — *стороны*, точки — *вершины* многоугольника.

Если многоугольник расположен в одной полуплоскости от любой прямой, содержащей его сторону, то он *выпуклый*.

8.1.2. *Треугольник* — многоугольник, имеющий три стороны и три вершины (рис. 8.1). Обозначение: $\triangle ABC$.

Стороны: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Периметр: $P = AB + BC + AC$.

Полупериметр: $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$.

Углы: $\angle A, \angle B, \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Высоты: $AK = h_a$, $BL = h_b$, $CM = h_c$ ($AK \perp BC$, $BL \perp AC$, $CM \perp AB$).

$\triangle ABC$ — равнобедренный, если $AB = BC$.

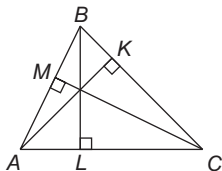


Рис. 8.1

8.1.3. Теорема *синусов*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Теорема *косинусов*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

8.1.4. Соотношения между функциями углов треугольника

$$1) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$2) \cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1;$$

$$3) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C + 2;$$

$$4) \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Здесь $\angle A, \angle B, \angle C$ — углы треугольника;
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

8.1.5. Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c;$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона;

$S = pr$, где r — радиус вписанной окружности;

$S = \frac{abc}{4R}$, где R — радиус описанной окружности;

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

8.1.6. Прямоугольный треугольник — $\triangle ABC$, у которого один из углов прямой (на рис. 8.2

$\angle C = 90^\circ$); $BC = a$, $AC = b$ — катеты, $AB = c$ — гипотенуза.

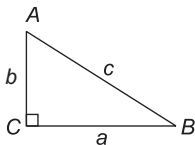


Рис. 8.2

Теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Функции острого угла:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \frac{1}{2}ch_c.$$

8.1.7. *Равносторонний* (правильный) треугольник — $\triangle ABC$, у которого равны стороны (рис. 8.3): $AB = BC = AC = a$. При этом $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$;

$$h_a = h_b = h_c = h; \quad h = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

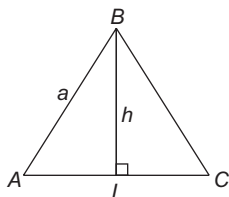


Рис. 8.3

Площадь:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad S = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3}.$$

8.2. Четырехугольники

8.2.1. *Выпуклый четырехугольник* — выпуклый многоугольник, имеющий четыре стороны и четыре вершины (рис. 8.4).

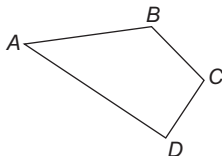


Рис. 8.4

Сумма углов выпуклого четырехугольника:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ.$$

8.2.2. Параллелограмм — четырехугольник $ABCD$, у которого $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$ (рис. 8.5).

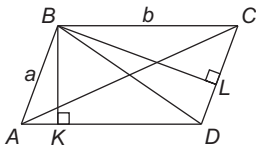


Рис. 8.5

Стороны:

$$AB = DC = a, BC = AD = b \quad (AB \parallel DC, BC \parallel AD).$$

Высоты:

$$BL = h_a, \\ BK = h_b \quad (BL \perp DC, BK \perp AD).$$

Диагонали:

$$AC = d_1, BD = d_2.$$

Связь между сторонами и диагоналями:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Площадь:

$$S = ah_a = bh_b; S = ab \sin A, S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi,$$

где φ — угол между диагоналями.

8.2.3. *Прямоугольник* — параллелограмм $ABCD$, у которого $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ (рис. 8.6).

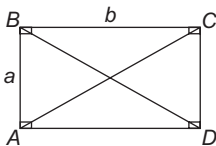


Рис. 8.6

Диагонали:

$$d_1 = d_2 = d.$$

Связь между сторонами и диагоналями:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Площадь:

$$S = ab.$$

8.2.4. *Ромб* — параллелограмм, у которого $AB = BC = CD = DA = a$ (рис. 8.7).

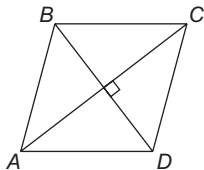


Рис. 8.7

Диагонали:

$$AC = d_1, BD = d_2.$$

$$AC \perp BD.$$

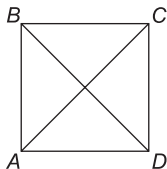
Связь между сторонами и диагоналями:

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Площадь:

$$S = a^2 \sin A, S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

8.2.5. *Квадрат* — прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = BC = CD = DA = a$ (рис. 8.8).

**Рис. 8.8**

Диагонали:

$$AC \perp BD, AC = BD = d.$$

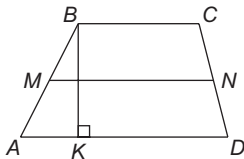
Связь между стороной и диагональю:

$$a = d \frac{\sqrt{2}}{2}, d = a\sqrt{2}.$$

Площадь:

$$S = a^2, S = \frac{1}{2} d^2.$$

8.2.6. *Трапеция* — четырехугольник $ABCD$, у которого $BC \parallel AD$, $AB \nparallel DC$ (рис. 8.9).

**Рис. 8.9**