

Глава 6

Электрические цепи с распределенными параметрами

6.1. Установившиеся процессы в цепях с распределенными параметрами

6.1.1. Уравнения однородной линии

При рассмотрении электромагнитных процессов, происходящих в линиях, служащих для передачи энергии, а также в телеграфных и телефонных линиях, необходимо иметь в виду, что магнитное и электрическое поля (МП и ЭП), связанные с ними, распределены вдоль всей линии и что превращение электромагнитной энергии в тепло также происходит вдоль всей линии. Такого рода электрические цепи, в отличие от цепей с сосредоточенными параметрами, называют цепями с *распределенными параметрами*.

Изучая линии, необходимо учитывать как сопротивление проводов линии, так и то обстоятельство, что с ними связано МП и что, следовательно, линия обладает индуктивностью. Кроме того, необходимо иметь в виду, что между проводами линии существует ЭП и что, следовательно, провода линии обладают емкостью друг относительно друга. Следует также принять во внимание, что вследствие несовершенства изоляции проводимость между проводами линии, вообще говоря, не равна нулю.

Рассмотрим однородную линию, т. е. линию, сопротивление и индуктивность которой, а также проводимость и емкость между проводами равномерно распределены вдоль ее длины. Обозначим сопротивление и индуктивность на единицу длины двухпроводной линии через r и L , а проводимость и емкость на единицу длины линии через g и C . В дальнейшем предположим, что параметры линии r , g , L , C постоянны.

Напряжение между проводами и ток в проводах линии в каждый момент времени различны в различных точках линии и являются поэтому функциями двух независимых переменных — времени t и расстояния x от точки линии, выбранной за начало.

Пусть в некоторый момент времени напряжение и ток на расстоянии x от начала равны соответственно u и i (рис. 6.1). Тогда в тот же момент времени

напряжение и ток на расстоянии $x + x dx$ от начала будут $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. Рассматривая участок линии длиной dx , мы видим, что падение напряжения на этом участке должно иметь две составляющие: $r i dx$, преодолевающую сопротивление этого участка, и $L dx \frac{\partial i}{\partial t}$, уравновешивающую ЭДС самоиндукции, возникающую на этом участке, то есть

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r dx i + L dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (6.1)$$

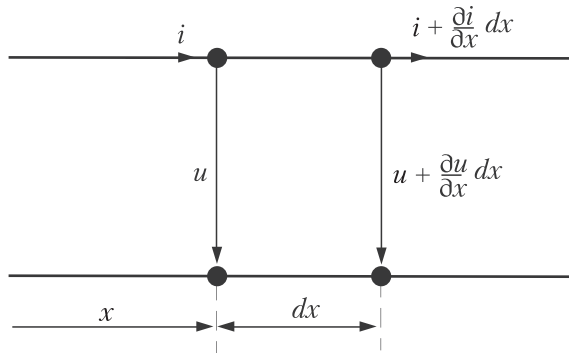


Рис. 6.1. Физическая модель однородной длинной линии

Разность токов в начале и в конце участка dx вызывается тем, что на этом участке от провода к проводу ответвляются ток проводимости $g dx$ и ток смещения $C dx \frac{\partial u}{\partial t}$, то есть

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = g dx u + C dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) в частных производных и являются уравнениями однородной линии. Они дают возможность по заданным начальным и граничным условиям найти напряжение и ток в линии как функции x и t .

В общем случае для n — проводной линии, расположенной в воздухе над поверхностью земли, для каждого из проводов необходимо в первом уравнении учитывать также ЭДС взаимной индукции от токов, протекающих в соседних проводах, а во втором уравнении учитывать также ток смещения между рассматриваемым проводом и всеми соседними проводами. При этом получаем систему из $2n$ уравнений (так называемых «телеграфных уравнений»):

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x} = r_k i_k + L_k \frac{\partial i_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} M_{km} \frac{\partial i_m}{\partial t}; \quad (6.3)$$

$$-\frac{\partial i_k}{\partial x} = g_k u_k + C \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} C_{km} \frac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t}, \quad (6.4)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$ — номер провода; r_k, L_k, g_k, C_k — собственные параметры k -го провода на единицу длины с учетом влияния земли; M_{km} и C_{km} — взаимная индуктивность и емкость между k -м и m -м проводами на единицу длины линии с учетом влияния земли.

Уравнения (6.3) и (6.4) представляют собой гиперболические уравнения, которые при решениях в стационарных и квазистационарных режимах работы однородной линии переходят в эллиптические уравнения, при рассмотрении переходных процессов — в волновые уравнения.

Ниже будут рассмотрены различные режимы работы двухпроводной однородной линии и методы решения. Данные решения представляют определенный интерес не только потому, что это наиболее простой случай, позволяющий установить основные особенности процессов в цепях с распределенными параметрами, но также и потому, что во многих случаях трехфазная линия, представляющая основную передачу электроэнергии в ЭЭС, может быть заменена эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Это можно сделать при синусоидальном процессе, если все провода находятся в одинаковых условиях, т. е. если осуществлена транспозиция проводов — последовательная перестановка их местами, и если полный цикл транспозиции значительно меньше длины волны тока и напряжения в линии. При этом для симметричных трехфазных напряжений прямой и обратной последовательностей токи в проводах также образуют симметричные системы соответственно прямой и обратной последовательностей. В этом случае достаточно рассматривать процесс в одной фазе, заменяя трехфазную линию эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Для напряжений и токов нулевой последовательности трехпроводную трехфазную линию также можно заменить эквивалентной двухпроводной, причем обратным проводом в этом случае является провод, эквивалентный земле при трехфазной линии.

6.1.2. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

К зажимам двухпроводной линии приложено синусоидальное напряжение с угловой частотой ω . При установившемся режиме все токи и напряжения

в линии будут также синусоидальными функциями времени той же частоты. Переходя к изображению синусоидальных напряжений и токов комплексами $\dot{U}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ и $\dot{I}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ — комплексные действующие значения напряжения и тока, зависящие только от x , из уравнений (6.1) и (6.2) найдем:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (r + j\omega L)\dot{I}; \quad (6.5)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (g + j\omega C)\dot{U}. \quad (6.6)$$

Взяв производную по x от уравнения (6.5), получим:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)\frac{d\dot{I}}{dx}$$

и, подставив значение $\frac{d\dot{I}}{dx}$ из уравнения (6.6), найдем:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U}.$$

Полагая $(r + j\omega L)(g + j\omega C) = \gamma^2$, имеем:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\dot{U} = 0 \quad (6.7)$$

Решение уравнения (6.7) для \dot{U} (6.2) можно записать в виде:

$$\dot{U} = A_1 \exp(-\gamma x) + A_2 \exp(\gamma x). \quad (6.8)$$

Тогда для \dot{I} получим:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L} [A_1 \exp(-\gamma x) - A_2 \exp(\gamma x)] = \\ &= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} [A_1 \exp(-\gamma x) - A_2 \exp(\gamma x)] \end{aligned}$$

и, положив

$$\sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} = Z,$$

найдем:

$$\dot{I} Z = A_1 \exp(-\gamma x) - A_2 \exp(\gamma x).$$

Комплексы $\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \beta + j\alpha$ и $Z = z \exp(j\vartheta)$ являются основными характеристиками однородной линии и их называют соответственно *коэффициентом распространения* и *характеристическим* или *волновым сопротивлением линии*.

Определим постоянные интегрирования A_1 и A_2 для случаев, когда заданы напряжение и ток или в начале линии, или в ее конце. Пусть известны напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 в начале линии. Тогда, приняв начало линии за начало отсчета расстояний и положив $x = 0$, имеем:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_1 + A_2; \quad \dot{I}_1 Z = A_1 - A_2: \\ A_1 &= 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z); \quad A_2 = 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\dot{U} = 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \exp(-\gamma x) + 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) \exp(\gamma x); \quad (6.9)$$

$$\dot{I} = 0,5\left(\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z}\right) \exp(-\gamma x) + 0,5\left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z}\right) \exp(\gamma x). \quad (6.10)$$

Пусть известны напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 в конце линии. В этом случае целесообразнее вести отсчет расстояний от конца линии, для чего в выведенных уравнениях достаточно заменить x на $l - x$, где l — длина линии. Тогда имеем:

$$\dot{U} = A_1 \exp(-\gamma l) \exp(\gamma x) + A_2 \exp(\gamma l) \exp(-\gamma x) = A_3 \exp(\gamma x) + A_4 \exp(-\gamma x);$$

$$\dot{I} Z = A_1 \exp(-\gamma l) \exp(\gamma x) - A_2 \exp(\gamma l) \exp(-\gamma x) = A_3 \exp(\gamma x) - A_4 \exp(-\gamma x),$$

если положить $A_1 \exp(-\gamma l) = A_3$ и $A_2 \exp(\gamma l) = A_4$. Далее, полагая $x = 0$, получим:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= A_3 + A_4; \quad \dot{I}_2 Z = A_3 - A_4; \\ A_3 &= 0,5(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z); \quad A_4 = 0,5(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\dot{U} = 0,5(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z) \exp(\gamma x) + 0,5(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z) \exp(-\gamma x); \quad (6.11)$$

$$\dot{I} = 0,5\left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z}\right) \exp(\gamma x) + 0,5\left(\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z}\right) \exp(-\gamma x). \quad (6.12)$$

Весьма часто в выражениях для \dot{U} и \dot{I} переходят к гиперболическим функциям, приняв во внимание, что

$$0,5[\exp(\gamma x) + \exp(-\gamma x)] = \operatorname{ch}(\gamma x); \quad 0,5[\exp(\gamma x) - \exp(-\gamma x)] = \operatorname{sh}(\gamma x).$$

Тогда при заданных \dot{U}_1 и \dot{I}_1 и отсчете расстояний от начала линии

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \gamma x, \quad (6.13)$$

а при заданных \dot{U}_2 и \dot{I}_2 и отсчете расстояний от конца линии

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x. \quad (6.14)$$

Нетрудно усмотреть сходство между зависимостями (6.13)–(6.14) и соответствующими зависимостями для однородных симметричных цепных схем (четырёхполюсников) [6.1]. Это сходство объясняется тем, что процессы в однородных линиях и в однородных цепных схемах сходны между собой, и однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев.

Однородная линия представляет собою частный случай симметричного пассивного четырёхполюсника, и поэтому напряжения \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и \dot{I}_1 , \dot{I}_2 должны подчиняться линейным зависимостям, установленным для четырёхполюсника.

И действительно, из выражения (6.14) для \dot{U} и \dot{I} , полагая $x = l$, получим:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma l,$$

откуда для постоянных четырёхполюсника A, B, C, D имеем:

$$A = D = \operatorname{ch} \gamma l; \quad B = Z \operatorname{sh} \gamma l; \quad C = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z},$$

причем

$$AD - BC = \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1.$$

Необходимо иметь в виду, что однородная линия, как и всякий симметричный четырёхполюсник, может быть заменена Т- или П-образной симметричной схемой. Постоянные этих схем легко определяются по постоянным A, B и C , а именно для Т-образной схемы:

$$Z_1 = Z_2 = Z \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\operatorname{sh} \gamma l} = Z \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l + 1}; \quad Y_0 = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z}$$

и для П-образной схемы:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{Z \operatorname{sh} \gamma l} = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z(\operatorname{ch} \gamma l + 1)}; \quad Z_0 = Z \operatorname{sh} \gamma l.$$

Заметим также, что любой режим работы однородной линии, как и всякого пассивного четырёхполюсника, можно получить наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания.

6.2. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

6.2.1. Общее решение уравнений однородной неискажающей линии

Введение. В цепях с распределенными параметрами, например с длинными линиями, обмотками электрических машин и трансформаторов и т. п., включение и отключение какого-либо участка (так же как и в цепях с сосредоточен-

ными параметрами) сопровождаются переходными процессами. При большой протяженности линий изменение внешних электрических и магнитных полей, например при грозовых разрядах, также вызывает переходные процессы. Переходные процессы в линиях возникают и при передаче телеграфных и телефонных сигналов, телемеханических импульсов или специальных импульсов для проверки линий и выявления места их повреждения.

Во всех случаях при анализе переходных процессов в цепях с распределенными параметрами необходимо исходить из общих закономерностей и дифференциальных уравнений, рассмотренных в ТОЭ, ч. 2 (см., например, [6.1, с. 342]). Так как линия является примером цепи с распределенными параметрами, в дальнейшем изложении речь будет идти о переходных процессах в линиях.

Аналитическая модель. Для выяснения наиболее характерных особенностей переходных режимов в однородных линиях найдем общее решение уравнений однородной линии:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.15)$$

для частного случая неискажающей линии, когда $rC = gL$.

Положим $r/L = g/C = \delta$ и введем вместо u и i новые функции u_1 и i_1 , связанные с u и i соотношениями:

$$u = u_1 \exp(-\delta t); \quad i = i_1 \exp(-\delta t).$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \exp(-\delta t); & \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} \exp(-\delta t) - \delta u_1 \exp(-\delta t); \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{\partial i_1}{\partial x} \exp(-\delta t); & \frac{\partial i}{\partial t} &= \frac{\partial i_1}{\partial t} \exp(-\delta t) - \delta i_1 \exp(-\delta t). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Подставляя (6.16) в уравнения линии (6.15) и сокращая на $\exp(-\delta t)$, приведем их к виду:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

и, взяв производную от первого по x , а от второго по t , получим:

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L \frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t}; \quad -\frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t} = C \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Отсюда найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

и, положив $CL = 1/v^2$, придем к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}. \quad (6.17)$$

Введем вместо x и t новые переменные, а именно:

$$\xi = x - vt; \quad \eta = x + vt.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -v \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v \frac{\partial u_1}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

и подставив найденные значения вторых производных в волновое уравнение, найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \vartheta(\eta) \quad \text{и} \quad u_1 = \int \vartheta(\eta) d\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

если положить $\int \vartheta(\eta) d\eta = \psi(\eta)$.

Возвращаясь к переменным x и t , можем написать:

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt),$$

и, следовательно, для напряжения u между проводами линии имеем:

$$u_1 = [\varphi(x - vt) + \psi(x + vt)] \exp(-\delta t). \quad (6.18)$$

Для нахождения i_1 подставим в уравнение $-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$ только что найденное выражение для u_1 . Тогда получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C \frac{\partial [\varphi(\xi) + \psi(\eta)]}{\partial t} = C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\ &= C v \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] = -\sqrt{C} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

и, проинтегрировав, найдем:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt) + f(t)]. \quad (6.19)$$

Для определения $f(t)$ подставим найденные для u_1 и i_1 значения в уравнение $-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}$ и тогда получим $\frac{df(t)}{dt} = 0$. Следовательно, $f(t) = A = \text{const}$.

Однако можно положить $A = 0$, так как при $A \neq 0$ мы могли бы ввести вместо φ и ψ функции $\varphi_1 = \varphi + 0,5A$ и $\psi_1 = \psi - 0,5A$, после чего получили бы выражения для u_1 и i_1 , в которые постоянная A не входит явно. Поэтому можем написать:

$$i_1 = \sqrt{C/L} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)]$$

и, следовательно, для тока i в линии получим:

$$i = [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)] \exp(-\delta t) / \sqrt{L/C}, \quad (6.20)$$

где $\sqrt{L/C}$ представляет собою, как известно из предыдущего, волновое сопротивление неискажающей линии.

Полученные выражения для напряжения u и тока i можно привести к иному виду, приняв во внимание, что

$$\delta^2 = \frac{r}{L} \frac{g}{C} = \beta^2 v^2 \quad \text{и} \quad \delta t = \beta vt,$$

где $\beta = \sqrt{rg}$ — коэффициент затухания неискажающей линии, и что, следовательно,

$$\exp(-\delta t) = \exp(-\beta vt) = \exp(\beta(x - vt)) \exp(-\beta x) = \exp(-\beta(x + vt)) \exp(\beta x).$$

На основании последних равенств выражения для u и i можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x - vt) \exp(-\beta x) + \psi(x + vt) \exp(\beta x); \\ i &= [\varphi(x - vt) \exp(-\beta x) - \psi(x + vt) \exp(\beta x)] / \sqrt{L/C}; \end{aligned} \quad (6.21)$$

причем следует иметь в виду, что функции φ и ψ в этих выражениях отличаются от φ и ψ в предыдущих выражениях для напряжения и тока соответственно множителями $\exp[\beta(x - vt)]$ и $\exp[-\beta(x + vt)]$.

6.2.2. Волны в неискажающей линии

Рассмотрим выражения (6.21) для напряжения и тока линии. При этом для простоты сначала допустим, что потери в линии пренебрежимо малы, то есть положим $r = 0$ и $g = 0$. Тогда $\delta = 0$, $\beta = 0$, $\exp(-\delta t) = 1$, $\exp[\beta(x - vt)] = \exp[-\beta(x + vt)] = \exp(-\beta x) = \exp(\beta x) = 1$ для линии без потерь мы получим:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x - vt) + \psi(x + vt); \\ i &= [\varphi(x - vt) / \sqrt{L/C}] + [\psi(x + vt) / (-\sqrt{L/C})]. \end{aligned}$$

Пусть в частном случае $\varphi(x+v) = 0$ и $u = \varphi(x-vt)$. Тогда, положив в последнем равенстве $t = 0$, мы найдем распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени. Возьмем некоторую произвольную точку x и предположим, что она перемещается вдоль линии со скоростью v , т. е. что ее положение определяется координатой $x = x_0 + vt$. Тогда напряжение в этой движущейся точке $u = \varphi(x_0 + vt - vt) = \varphi(x_0)$ не будет зависеть от времени. Так как это заключение справедливо для любой точки, движущейся вдоль линии со скоростью v , то, следовательно, при $u = \varphi(x-vt)$ начальное распределение напряжения перемещается вдоль линии со скоростью v . Иными словами, при $u = \varphi(x-vt)$ вдоль линии распространяется со скоростью v прямая волна напряжения, бегущая вперед и не претерпевающая изменения формы. Аналогично функция $u = \varphi(x+vt)$ определяет обратную волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии также без изменения формы со скоростью $(-v)$ или, что то же, распространяющуюся со скоростью v в отрицательном направлении счета расстояний, т. е. бегущую назад.

Таким образом, при отсутствии потерь в линии напряжение, а также и ток в ней могут быть представлены как суммы двух волн, распространяющихся вдоль линии без изменения формы со скоростью $v = 1/\sqrt{LC}$ в противоположных направлениях. При этом в любой точке линии отношение напряжения и тока для прямой волны равно $\sqrt{L/C}$, т. е. волновому сопротивлению линии, зависящему только от параметров линии, а для обратной волны это отношение равно $-\sqrt{L/C}$. При рассмотрении установившихся процессов уже указывалось, что скорость распространения волн в неискажающей однородной линии $v = 1/\sqrt{LC}$ для воздушных линий равна скорости света в воздухе.

Наличие в выражениях для u и i множителя $\exp(-\delta t)$ или, соответственно, в другом их выражении множителей $\exp(-\beta x)$ и $\exp(\beta x)$, причем $\beta = \sqrt{r g}$ показывает, что обе волны, по мере продвижения их вдоль линии, затухают по показательному закону. Причиной затухания волн является постепенное превращение начального запаса энергии электрического и магнитного полей, связанных с линией, в тепло, выделяющееся в проводах, так как $r \neq 0$, а также и в среде, окружающей провода, так как $g \neq 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что волны при движении их вдоль линии не затухают. Затухание волн вследствие потерь в линии при необходимости может быть учтено, по крайней мере, для неискажающей линии, так как нами установлено, что в этом случае волны затухают по показательному закону с показателем $\beta x = \sqrt{r g} x$.

При наличии только одних прямых или только одних обратных волн для энергии магнитного и электрического полей на элементе dx , приняв во внимание, что $(u^2 / i^2) = (L / C)$, найдем:

$$dW_M = \frac{1}{2} i^2 L dx = \frac{1}{2} u^2 C dx = dW_E.$$

Отсюда следует, что в каждом из этих случаев энергии магнитного и электрического полей на элементе длины линии, а следовательно, и во всей линии,

равны друг другу, и для суммы энергий этих полей на элементе линии получим:

$$dW = dW_M + dW_Э = i^2 L dx = u^2 C dx = u i \sqrt{LC} dx$$

и для соответствующей мощности найдем:

$$p = ui = i^2 \sqrt{\frac{L}{C}} = u^2 \sqrt{\frac{C}{L}},$$

откуда следует, что при данном значении напряжения эта мощность тем больше, чем меньше волновое сопротивление линии.

6.2.3. О происхождении и характере волн в линиях

Возникновение волн в линиях обычно связано или с атмосферными разрядами, или с переключениями, т. е. с включением и выключением или самих линий, или устройств, связанных с ними.

Пусть в линии на некотором ее протяжении индуктирован заряд вследствие нахождения над этой частью линии заряженного облака. Если облако, индуктировавшее заряд, разрядится, то этот заряд освободится, и тогда напряжение вдоль линии будет распределено пропорционально заряду, приходящемуся на каждый элемент длины линии. В результате освобождения индуктированного заряда вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока. Пусть распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени задано функцией $f_0(x)$ (рис. 6.2, *a*). Волновое сопротивление линии, являющееся в нашем случае вещественным числом, равным L/C , обозначим через z . Тогда, приняв во внимание, что ток в начальный момент времени равен нулю, имеем:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{\varphi_0} + u_{\varphi_0} = f_0(x); \\ i_0 &= i_{\varphi_0} + i_{\varphi_0} = (u_{\varphi_0} - u_{\varphi_0})/z = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$u_{\varphi_0} = u_{\varphi_0} = 0,5f_0(x).$$

Таким образом, в начальный момент времени напряжение представляет собою сумму двух равных волн, одинаковых по форме и имеющих один и тот же знак, а ток — сумму двух волн, одинаковых по форме, но имеющих противоположные знаки.

С момента освобождения индуктированного заряда эти волны напряжения, а также и волны тока распространяются по линии в противоположных направлениях, причем скорости всех этих волн по абсолютной величине равны между собою. На рис. 6.2 представлено движение волн напряжения и тока в первые моменты времени после освобождения индуктированного заряда в предположении, что они не затухают.

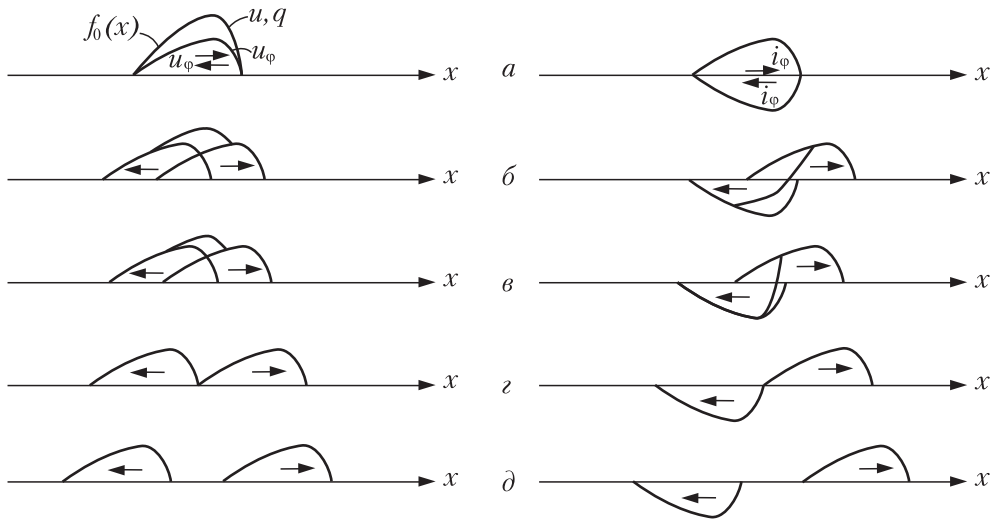


Рис. 6.2. Распределение напряжения вдоль линии при $t = 0$

При изучении явлений, связанных с переключениями, в тех случаях, когда длина линии мала по сравнению с длиной волны, мы будем предполагать, что внешние ЭДС постоянны. Это предположение допустимо, так как рассматриваемые явления протекают настолько быстро, что в случае синусоидальной ЭДС, имеющей частоту порядка десятков герц, величина этой ЭДС за время пробега волны вдоль всей линии может измениться лишь весьма незначительно. Кроме того, можно считать, что процессы переключения осуществляются мгновенно. В соответствии с этими предположениями в дальнейшем примем, что волны напряжения и тока, идущие от источника внешней ЭДС, имеют прямоугольную форму.

6.2.4. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий

Пусть волна φ_1 , бегущая от источника ЭДС по однородной линии, имеющей волновое сопротивление z_1 , достигла конца этой линии, в котором последняя соединена с другой однородной линией, имеющей волновое сопротивление z_2 . Обозначив напряжение и ток в первой линии через u_1 и i_1 , а во второй — через u_2 и i_2 , в месте сопряжения обеих линий имеем $u_1 = u_2$ и $i_1 = i_2$. Предположим, что во второй линии до прихода волны из первой линии напряжения не было. Тогда непосредственно после прихода волны к месту сопряжения линий во второй линии может возникнуть лишь волна φ_2 , бегущая в том же направлении, что и волна φ_1 , и называемая **преломленной** волной, в то время как в первой линии, кроме волны φ_1 , называемой **падающей** волной, при $z_2 \neq z_1$ обязательно возникнет волна φ_1 , бегущая в обратном направлении и называемая

отраженной волной, так как иначе не могут быть удовлетворены условия равенства напряжений или токов в месте сопряжения линий. Поэтому, отмечая индексами φ_1 , ϕ_1 и φ_2 соответственно падающие, отраженные и преломленные волны, в месте сопряжения линий имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{\varphi_1} + u_{\phi_1} = u_{\varphi_2} = u_2; \\ i_1 &= (u_{\varphi_1} - u_{\phi_1}) / z_1 = u_{\varphi_2} / z_2 = i_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} u_{\varphi_2} &= \frac{2z_2}{z_2 + z_1} u_{\varphi_1}; \quad u_{\phi_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} u_{\varphi_1}; \\ i_{\varphi_2} &= \frac{2z_1}{z_2 + z_1} i_{\varphi_1}; \quad i_{\phi_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 + z_1} i_{\varphi_1}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Из зависимостей (6.22) следует, что в данном случае преломленные и отраженные волны имеют ту же форму, что и падающие волны. Отношения $(u_{\varphi_2} / u_{\varphi_1})$ и $(i_{\varphi_2} / i_{\varphi_1})$ можно рассматривать как коэффициенты преломления, а отношения $(u_{\phi_1} / u_{\varphi_1}) = q_u$ и $(i_{\phi_1} / i_{\varphi_1}) = q_i$ — как коэффициенты отражения.

Из выражений, полученных для преломленных и отраженных волн, следует, что преломленные волны напряжения и тока имеют тот же знак, что и падающие, а из отраженных волн одна сохраняет знак падающей волны, а другая имеет обратный знак.

При $z_1 < z_2$, что, например, имеет место при переходе волны из кабельной линии в воздушную, преломленная волна напряжения больше падающей, а преломленная волна тока меньше падающей. Что касается отраженных волн, то волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменной знака, причем по абсолютной величине обе эти волны меньше соответствующих падающих волн. При этом вследствие наложения отраженных волн на падающие ток в первой линии уменьшается, а напряжение возрастает, но не более чем в два раза. На рис. 6.3 показаны падающие, преломленные и отраженные волны при $z_2 > z_1$. Заметим, что даже при очень больших значениях z_2 преломленная волна напряжения не может превысить падающую волну более чем в два раза.

При $z_1 > z_2$ преломленная волна напряжения меньше падающей, а преломленная волна тока больше падающей. В этом случае при отражении знак изменяется для волны напряжения, а абсолютные величины обеих отраженных волн опять будут меньше, чем величины соответствующих падающих волн. Вследствие наложения отраженных волн на волны падающие напряжение в первой линии уменьшится, а ток возрастет, но не более чем в два раза (рис. 6.4). Заметим, что даже при очень больших значениях z_2 преломленная волна тока не может превысить падающую волну более чем в два раза.

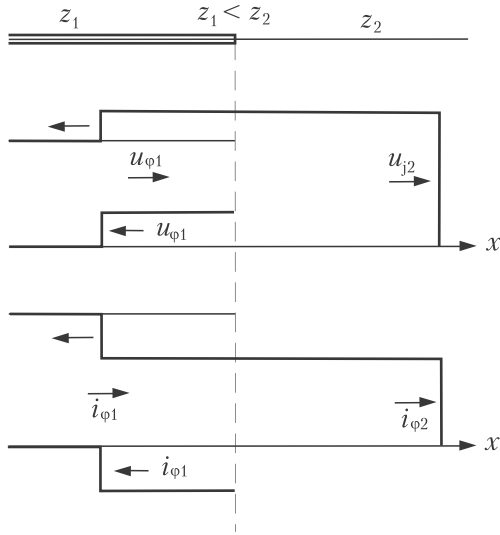


Рис. 6.3. Падающие, преломленные и отраженные волны при $z_1 < z_2$

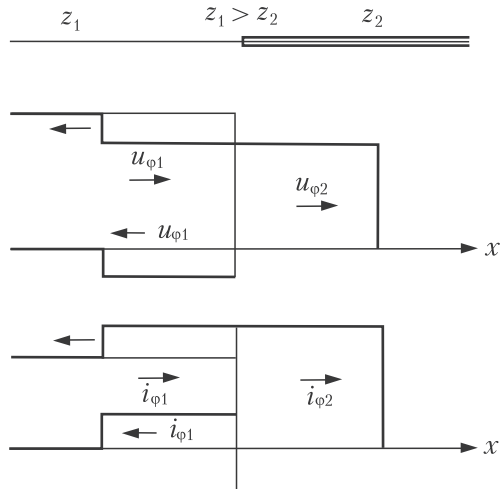


Рис. 6.4. Падающие, преломленные и отраженные волны при $z_1 > z_2$

Рассматривая мощность p в месте сопряжения линий, имеем:

$$p = u_1 i_1 = u_2 i_2$$

или

$$(u_{\phi 1} + u_{\phi 1}) \frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} - \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}^2}{z_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1} + \frac{u_{\phi 2}^2}{z_2}$$

или

$$p_{\phi 1} = p_{\phi 1} + p_{\phi 2}, \quad (6.23)$$

где $p_{\phi 1}, p_{\phi 1}, p_{\phi 2}$ — мощности падающих отраженных и преломленных волн.

Из (6.23) следует, что часть мощности падающих волн, равная мощности преломленных волн, переходит во вторую линию, а оставшая часть, равная мощности отраженных волн, возвращается обратно в первую линию.

Из изложенного следует, что при переходе волны напряжения из линии с меньшим волновым сопротивлением в линию с большим волновым сопротивлением напряжение увеличивается и в пределе может удвоиться. Поэтому напряжение возрастает при переходе волны из кабельной линии в воздушную и из линий передачи в обмотки трансформаторов, которые представляют собою цепи, обладающие значительным волновым сопротивлением, превосходящим волновое сопротивление воздушных линий.

Волны, возникающие в линиях, распространяются с конечной скоростью и могут поэтому вызывать значительные перенапряжения между соседними точками цепи, в одну из которых волна напряжения уже пришла. Эти перенапряжения тем больше, чем круче фронт волны, и наиболее значительны при отвесном фронте волны. В связи с этим первые витки обмоток трансформаторов в соответствующих случаях выполняют со значительно усиленной изоляцией.

6.2.5. Отражение волн от конца линии

Пусть бегущие волны напряжения и тока достигли конца однородной линии, имеющей волновое сопротивление z и замкнутой на сколь угодно сложную цепь с сосредоточенными параметрами. В результате отражения падающих волн ϕ от конца линии возникнут отраженные волны ϕ , и для напряжения u и тока i в конце линии или, иными словами, для напряжения на зажимах оконечной цепи и тока в ней получим:

$$u = u_{\phi} + u_{\phi}; \quad i = i_{\phi} + i_{\phi} = (u_{\phi} - u_{\phi}) / z; \quad z i = u_{\phi} - u_{\phi},$$

откуда

$$2u_{\phi} = z i + u.$$

Из этой простой зависимости следует, что ток i можно найти как ток, возникающий в эквивалентной схеме, включаемой под напряжение $2u_{\phi}$ и состоящей из активного сопротивления, равного волновому сопротивлению z линии, и последовательно соединенной с ними оконечной цепи.

Определив ток i по заданным u_ϕ , z и параметрам конечной цепи, можно найти отраженные волны напряжения и тока из соотношений:

$$u_\phi = u_\phi - z i; \quad i_\phi = -\frac{u_\phi}{z}.$$

Рассмотрим, пользуясь этим способом, отражение волн от простейших конечных цепей в предположении, что ЭДС источника падающих волн постоянна.

Пусть однородная линия с волновым сопротивлением z замкнута на сопротивление r_0 . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений z и r_0 , и мы имеем:

$$i = \frac{2u_\phi}{z + r_0}; \quad u_\phi = u_\phi - z i = \frac{r_0 - z}{r_0 + z} u_\phi; \quad i_\phi = -\frac{u_\phi}{z} = \frac{z - r_0}{z + r_0} i_\phi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае получены такие же соотношения между отраженными и падающими волнами, как и в случае отражения волн в месте сопряжения двух линий с той лишь разницей, что вместо волнового сопротивления второй линии вошло сопротивление r_0 , на которое замкнута линия.

При этом для мощности $p = u i$ в конце линии имеем:

$$p = u i = (u_\phi + u_\phi) \frac{u_\phi - u_\phi}{z} = \frac{u_\phi^2}{z} - \frac{u_\phi^2}{z} = p_\phi - p_\phi,$$

то есть эта мощность, поглощаемая приемником, равна разности мощностей падающих и отраженных волн. Если сопротивление r_0 равно волновому сопротивлению линии z , то отраженных волн не возникает, и вся мощность падающих волн поглощается приемником.

Из полученных выражений можно установить соотношение между падающими и отраженными волнами в случае отражения волн от конца разомкнутой или короткозамкнутой линии. При разомкнутой линии, полагая $r_0 = \infty$, в конце линии имеем:

$$u_\phi = u_\phi; \quad i_\phi = -i_\phi,$$

а при короткозамкнутой линии, полагая $r_0 = 0$, в конце линии получим:

$$u_\phi = -u_\phi; \quad i_\phi = i_\phi,$$

то есть в этих случаях отраженные волны имеют ту же величину, что и падающие, причем при разомкнутой линии с переменной знака отражается волна тока, а при короткозамкнутой линии с переменной знака отражается волна напряжения (рис. 6.5). Таким образом, в результате наложения отраженных волн на падающие в разомкнутой линии напряжение на ее конце возрастает в два раза, а в короткозамкнутой линии ток в ее конце возрастает также в два раза, что можно получить из исследования отражения волн в месте сопряжения двух линий, полагая соответственно или $z_2 = \infty$, или $z_2 = 0$.

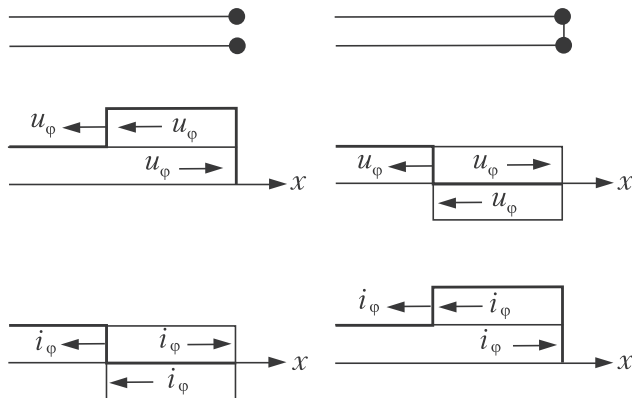


Рис. 6.5. Отражение волн от конца линии

Это можно пояснить следующим образом. И при холостом ходе, и при коротком замыкании падающие волны с присущей им энергией полностью отражаются от конца линии, так как в конце линии энергия не потребляется. Поэтому в той части линии, до которой дошли отраженные волны, энергия в два раза больше энергии падающих волн и, следовательно, в четыре раза больше энергии магнитного поля падающей волны тока, а также в четыре раза больше энергии электрического поля падающей волны напряжения, так как эти энергии равны друг другу.

При холостом ходе линии ток в ее конце должен равняться нулю. Поэтому когда падающая волна тока придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна тока, и ток в конце линии упадет до нуля, а энергия магнитных полей, связанных с падающей и отраженной волнами тока, перейдет в энергию электрического поля. Увеличение в конце линии энергии электрического поля в четыре раза повлечет за собой возрастание напряжения в конце линии в два раза. Это повышение напряжения, связанное с переходом энергии магнитного поля в энергию электрического поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

При коротком замыкании линии напряжение в ее конце должно равняться нулю. Поэтому когда падающая волна напряжения придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна напряжения, и напряжение в конце линии упадет до нуля, а энергия электрических полей, связанных с падающей и отраженной волнами напряжения, перейдет в энергию магнитного поля. Увеличение в конце линии энергии магнитного поля в четыре раза повлечет за собой возрастание тока в конце линии в два раза. Такое возрастание тока, связанное с переходом энергии электрического поля в энергию магнитного поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

Рассмотрим отражение волн в случае, когда конец однородной линии замкнут на цепь (r_0, L_0) . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно

соединенных сопротивления $(z + r_0)$ и индуктивности L_0 , и при $u_\phi = \text{const}$ для тока i получим:

$$i = \frac{2u_\phi}{z + r_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

где $\tau = \frac{L_0}{z + r_0}$, и для u_ϕ и i_ϕ найдем

$$u_\phi = \left[\frac{r_0 - z}{r_0 + z} + \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_\phi; \quad i_\phi = \left[\frac{z - r_0}{r_0 + z} - \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_\phi. \quad (6.24)$$

Из (6.24), положив $t = 0$, следует, что в первый момент отражение от цепи (r_0, L_0) происходит так же, как и от разомкнутого конца линии. Полагая $t = \infty$, видим, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые ранее были получены для линии, замкнутой на сопротивление r_0 . На рис. 6.6 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда:

$$u_\phi = \left[-1 + 2 \exp\left(-\frac{z}{L_0} t\right) \right] u_\phi; \quad i_\phi = \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{z}{L_0} t\right) \right] i_\phi.$$

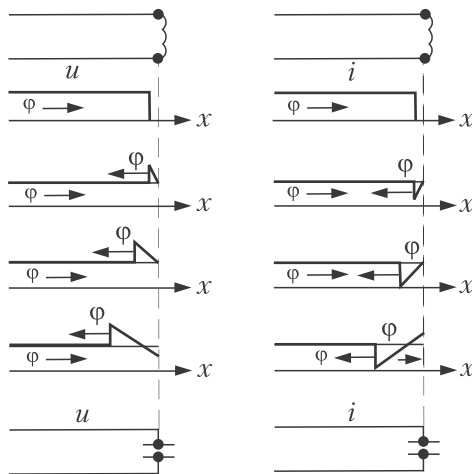


Рис. 6.6. Падающие и отраженные волны для случая $r_0 = 0$

Рассмотрим случай, когда волны отражаются от конца линии, замкнутой на цепь (r_0, C_0) . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивления $(z + r_0)$ и конденсатора емкостью C_0 , и при $u_\phi = \text{const}$ для тока i мы имеем:

$$i = \frac{2u_\phi}{z + r_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где $\tau = (z + r_0)C_0$, и для u_ϕ и i_ϕ найдем:

$$u_\phi = \left[1 - \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_\phi; \quad i_\phi = \left[-1 + \frac{2z}{r_0 + z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_\phi. \quad (6.25)$$

Из выражений (6.25) при $t = 0$ следует, что в первый момент времени отражение от цепи (r_0, C_0) , происходит так же, как в линии, замкнутой на сопротивление r_0 . Полагая $t = \infty$, нетрудно убедиться, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для случая разомкнутой линии. На рис. 6.6 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда мы имеем:

$$u_\phi = \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{t}{zC_0}\right) \right] u_\phi; \quad i_\phi = \left[-1 + 2 \exp\left(-\frac{t}{zC_0}\right) \right] i_\phi.$$

Так как до прихода отраженных волн к началу любой однородной линии напряжение на ее входных зажимах равно произведению из тока в начале линии на ее волновое сопротивление, то изложенный способ определения отраженных волн пригоден и в тех случаях, когда к оконечной цепи с сосредоточенными параметрами присоединены те или иные однородные линии. При этом, составляя соответствующую эквивалентную схему, каждую из линий, непосредственно присоединенных к оконечной цепи, следует заменить активным сопротивлением, равным ее волновому сопротивлению, независимо от того, что находится в конце этой линии. Необходимо, однако, иметь в виду, что составленная таким образом эквивалентная схема дает возможность производить расчеты лишь до момента прихода отраженных волн к началу хотя бы одной из линий, учтенных в этой схеме.

6.2.6. Процесс включения однородной линии

Рассмотрим процесс включения под синусоидальное напряжение однородной линии в предположении, что длина линии мала по сравнению с длиной волны. Тогда, как было указано выше, можно пренебречь затуханием волн в начальной стадии процесса включения, а также ограничиться рассмотрением включения линии под действие постоянного напряжения, равного мгновенному значению напряжения в начале линии в момент включения. Пусть, кроме того, внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало, иными словами, мощность генератора весьма велика. При этом предположении волны напряжения и тока будут отражаться от генератора так, как они отражаются от короткозамкнутого конца линии.

Рассмотрим случай, когда включаемая линия разомкнута на приемном конце, и предположим, что до момента включения напряжение и ток по всей длине линии равны нулю. После включения от генератора вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока, и когда они дойдут до конца линии, напряжение вдоль линии будет равно напряжению генератора, а ток — напряжению

генератора, деленному на волновое сопротивление линии. Дойдя до разомкнутого конца линии, эти волны отразятся, причем волна напряжения не изменит знака, а волна тока изменит знак. При движении к генератору отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, повышает напряжение в линии до удвоенного напряжения генератора, а отраженная волна тока уменьшает ток в линии до нуля. В тот момент, когда эти волны дойдут до генератора, ток по всей длине линии будет равен нулю, и вся линия будет заряжена до напряжения, равного удвоенному напряжению генератора. Волны, отразившиеся от разомкнутого конца, у генератора претерпят новое отражение, при котором волна напряжения изменит знак, а волна тока сохранит знак, так что получится отрицательная волна напряжения и отрицательная волна тока, идущие от генератора к концу линии. Отрицательная волна напряжения при движении к концу линии понижает напряжение в линии до напряжения, равного напряжению генератора, и одновременно в линии возникает ток, противоположный по направлению первоначальному току. Дойдя до конца линии, отрицательные волны напряжения и тока претерпят третье отражение, в результате которого к генератору пойдет отрицательная волна напряжения, снижающая напряжение в линии до нуля, и положительная волна тока, уменьшающая ток в линии до нуля. Когда эти волны дойдут до генератора, линия будет полностью разряжена, и напряжение и ток по всей длине линии будут равны нулю. Этим и завершится полный цикл процессов, который при сделанных нами предположениях будет периодически повторяться. Отдельные характерные фазы рассмотренного цикла процессов представлены на рис. 6.7.

Полный цикл процесса движения и отражения волн в рассмотренном случае совершается в промежуток времени

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC},$$

где l — длина линии, а v — скорость распространения волн в ней.

Этот промежуток времени T называют периодом собственных колебаний линии. Если бы индуктивность и емкость линии были сосредоточены, то период T_0 собственных колебаний такого контура из катушки с индуктивностью Ll и конденсатора емкостью Cl был бы:

$$T = 2\pi\sqrt{LlCl} = 2\pi l\sqrt{LC},$$

то есть в $\pi/2$ раза больше, чем T .

Наличие потерь в линии ведет к тому, что волны напряжения и тока постепенно затухают, а величины напряжения и тока приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме холостого хода.

В случае включения линии, конец которой замкнут накоротко, волна напряжения, распространяющаяся от генератора, отражается от конца линии с переменной знака, а волна тока — без перемены знака. Отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, понижает напряжение в линии до нуля, а в результате наложения отраженной волны тока ток в линии удваивается. Когда отраженные волны дойдут до генератора, то напряжение во всей

линии будет равно нулю, а ток — удвоенному первоначальному току. Так как при всех последующих отражениях и от генератора и от короткозамкнутого конца линии волна напряжения отражается с переменной знака, то напряжение в линии изменяется между нулем и напряжением генератора.

Отражение волны тока и от генератора и от короткозамкнутого конца линии каждый раз происходит без перемены знака. Поэтому ток в линии после каждого отражения возрастает на величину первоначального тока (рис. 6.8).

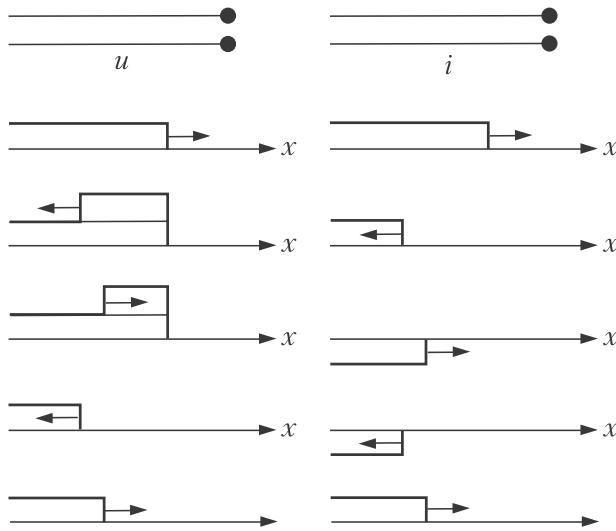


Рис. 6.7. Фазы процесса включения однородной линии

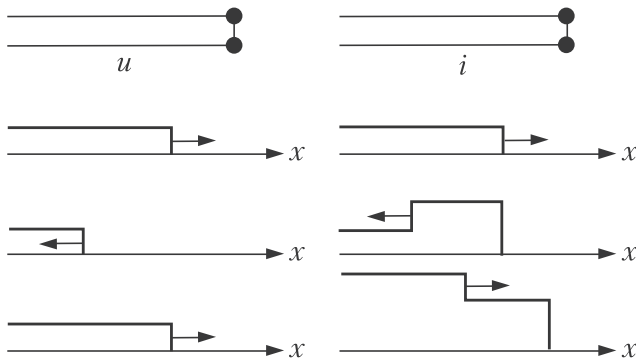


Рис. 6.8. Процессы в однородной линии, замкнутой в конце накоротко

Наличие потерь в линии вызывает затухание волн и ограничивает нарастание тока. По мере затухания волн напряжение и ток приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме короткого замыкания.

Если длина линии сравнима с длиной волны, то за время каждого пробега волны вдоль линии напряжение на зажимах генератора в начале линии успеет заметно измениться. При рассмотрении процессов в линии это изменение должно быть принято во внимание.

6.2.7. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включена последовательно реактивная катушка с индуктивностью L_0 . Тогда, пренебрегая емкостью между витками обмотки катушки, в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2; u_1 = L_0 \frac{di_2}{dt} + u_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}}{z_2}; u_{\phi 1} + u_{\phi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\phi 2}}{dt} + u_{\phi 2},$$

откуда

$$2u_{\phi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\phi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\phi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны имеем $u_{\phi 1} = \text{const}$ и, следовательно,

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; i_{\phi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1},$$

где $\tau = L_0 / (z_1 + z_2)$, и тогда для $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$ найдем:

$$\begin{aligned} u_{\phi 1} &= \left[\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} + \frac{2z_1}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \\ i_{\phi 1} &= \left[\frac{z_1 - z_2}{z_2 + z_1} - \frac{2z_1}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Из (6.26) следует, что в данном случае преломленные волны $u_{\phi 2}$ и $i_{\phi 2}$ нарастают постепенно от значений, равных нулю при $t = 0$, до значений, которые мы имели в случае отсутствия реактивной катушки. Что же касается отраженных волн $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$, то в первый момент они имеют такие же значения, как при отражении от разомкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии катушки. Таким образом, в результате включения реактивной катушки фронт преломленных волн

приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Быстрота нарастания напряжения и тока во второй линии тем меньше, чем больше постоянная времени $\tau = L_0 / (z_1 + z_2)$, т. е. тем меньше, чем больше индуктивность катушки. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию магнитного поля, связанного с реактивной катушкой. Применяя реактивные катушки для сглаживания фронта преломленных волн, следует иметь в виду, что в результате наложения отраженной волны на падающую волну напряжение в первой линии в первые моменты времени удваивается.

На рис. 6.9 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для случая $z_1 = z_2$, когда мы имеем:

$$u_{\varphi 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\varphi 1};$$

$$u_{\varphi 1} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 1} = -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) i_{\varphi 1},$$

где $\tau = L_0 / 2z_1 = L_0 / 2z_2$.

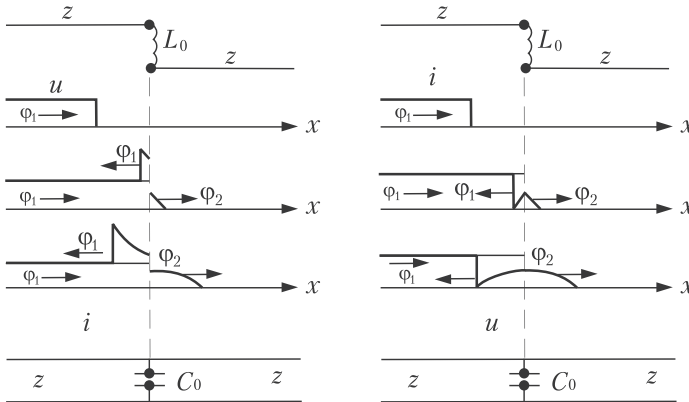


Рис. 6.9. Падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$

Пусть в месте сопряжения линий включено ответвление, содержащее конденсатор, емкость которого равна C_0 . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$u_1 = u_2; \quad i = C_0 \frac{du_2}{dt} + i_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\varphi 1} + u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\varphi 1}}{z_1} = C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$2u_{\varphi 1} = z_1 C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны $u_{\phi 1} = \text{const}$ мы получим:

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1},$$

где $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, и тогда для $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$ найдем:

$$u_{\phi 1} = \left[\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} - \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 1} = \left[\frac{z_1 - z_2}{z_2 + z_1} + \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1}. \quad (6.27)$$

Выражения (6.27) для $u_{\phi 2}$ и $i_{\phi 2}$ аналогичны выражениям (6.26), и в соответствии с этим преломленные волны нарастают постепенно от нуля до тех значений, которые они имеют при отсутствии ответвления. При этом быстрота нарастания их, определяемая постоянной времени $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, тем меньше,

чем больше емкость конденсатора C_0 . Что касается отраженных волн $u_{\phi 1}$ и $i_{\phi 1}$, то в первый момент времени они имеют такие же значения, как при отражении от короткозамкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии ответвления.

Таким образом, в результате наличия емкостного ответвления фронт преломленных волн, как и в предыдущем случае, приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию электрического поля конденсатора.

При применении емкостного ответвления для сглаживания фронта преломленных волн отраженная волна напряжения в первый момент времени равна по величине и противоположна по знаку падающей волне, и напряжение в первой линии в момент прихода волны к месту сопряжения линий падает до нуля, а затем постепенно нарастает. На рис. 6.9 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для случая $z_1 = z_2$:

$$\begin{aligned} u_{\phi 2} &= \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] i_{\phi 1}; \\ u_{\phi 1} &= -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u_{\phi 1}; \quad i_{\phi 1} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) i_{\phi 1}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

6.2.8. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включено последовательно с ними активное сопротивление r_0 . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = r_0 i_2 + u_2$$

и в случае перехода волны $u_{\phi 1}$ из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}}{z_2}; u_{\phi 1} + u_{\phi 1} = \frac{r_0}{z_2} \frac{d u_{\phi 2}}{d t} + u_{\phi 2},$$

и, следовательно,

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\phi 1}; u_{\phi 1} = \frac{z_2 - z_1 + r_0}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\phi 1}. \quad (6.29)$$

Из выражений (6.29) видно, что наличие сопротивления r_0 уменьшает преломленную волну напряжения и что даже при большом значении z_2 , увеличивая r_0 , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна $u_{\phi 1}$, при $z_2 > z_1$ с увеличением r_0 возрастает, но не может превзойти величину $u_{\phi 1}$.

Мощность, выделяющаяся в сопротивлении r_0 , равна $p = r_0 i_2^2 = \frac{r_0}{z_2^2} u_{\phi 2}^2$, в то время как мощность падающей волны $p_{\phi 1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1}$.

Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\phi 1}} = \frac{r_0 z_1}{z_2^2} \frac{u_{\phi 2}^2}{u_{\phi 1}^2} = \frac{4r_0 z_1}{(z_2 + z_1 + r_0)^2},$$

причем при $r_0 = z_2 + z_1$ это отношение достигает максимума, равного $z_1 / (z_2 + z_1)$. Таким образом, значительная часть мощности падающей волны может быть поглощена сопротивлением r_0 лишь при $z_1 \gg z_2$, т. е. когда преломленная волна напряжения мала по сравнению с падающей. Однако при любом соотношении между z_1 и z_2 , взяв $r_0 = z_2 + z_1$, мы получим $u_{\phi 2} = u_{\phi 1} z_2 / (z_1 + z_2)$, и тогда преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии сопротивления r_0 (рис. 6.10).

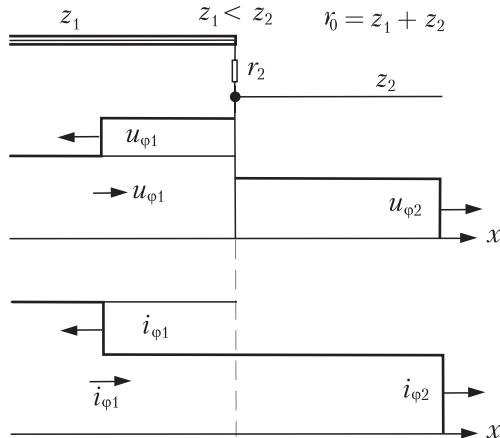


Рис. 6.10. Падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $r_0 = z_2 + z_1$

Для того чтобы перенапряжения, возникшие на одном участке линии, не распространялись по всей ее длине, между отдельными участками линии включают активные сопротивления, уменьшающие, как мы только что видели, величину волн напряжения при их прохождении из одного участка в другой. Так как для эффективного действия эти сопротивления должны иметь величину порядка 500–600 Ом, то параллельно с ними включают реактивные катушки, имеющие незначительное сопротивление для тока нормальной частоты, но оказывающие в первые моменты значительное сопротивление волнам.

Пусть теперь в месте сопряжения линий включено ответвление, имеющее только активное сопротивление r_0 . Тогда в этом месте

$$u_1 = u_2; \quad i_1 = \frac{u_2}{r_0} + i_2,$$

и в случае перехода волны $u_{\phi 1}$ из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\phi 1} + u_{\phi 1} = u_{\phi 2}; \quad \frac{u_{\phi 1} - u_{\phi 1}}{z_1} = \frac{u_{\phi 2}}{r_0} + \frac{u_{\phi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$u_{\phi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\phi 1}; \quad u_{\phi 1} = \frac{z_2 - z_1 - \frac{z_2 z_1}{r_0}}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\phi 1}.$$

Из этого вытекает, что наличие активного ответвления уменьшает преломленную волну напряжения, причем, уменьшая r_0 , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна $u_{\phi 1}$ с уменьшением r_0 возрастает по абсолютной величине, но не может превзойти величину $u_{\phi 1}$.

Мощность, выделяемая в ответвлении, равна $p = \frac{u_{\phi 2}^2}{r_0}$, в то время как мощность падающей волны $p_{\phi 1} = \frac{u_{\phi 1}^2}{z_1}$. Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\phi 1}} = \frac{z_1}{r_0} \frac{u_{\phi 2}^2}{u_{\phi 1}^2} = \frac{4z_1 z_2^2}{r_0 \left(z_2 + z_1 + \frac{z_1 z_2}{r_0} \right)^2},$$

причем при $r_0 = z_1 z_2 / (z_1 + z_2)$ это отношение достигает максимума, равного $2z_2 / (z_1 + z_2)$. Таким образом, в рассматриваемом случае при $z_1 \ll z_2$, когда преломленная волна напряжения значительно превосходит падающую, большая часть мощности последней поглощается в активном ответвлении. При этом, взяв $r_0 = z_1 z_2 / (z_1 + z_2)$, мы получим $u_{\phi 2} = [z_2 / (z_1 + z_2)] u_{\phi 1}$, и тогда при любом соотношении между z_1 и z_2 преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии ответвления (рис. 6.11).