

Глава 3

Решение уравнений

Встроенные функции Mathcad в состоянии решить любое алгебраическое уравнение. Для решения одного уравнения с одним неизвестным можно использовать функции `root`, `polyroot` или `find`. Mathcad решает уравнения или системы итерационным методом, поэтому перед решением необходимо задать начальное приближение для всех корней.

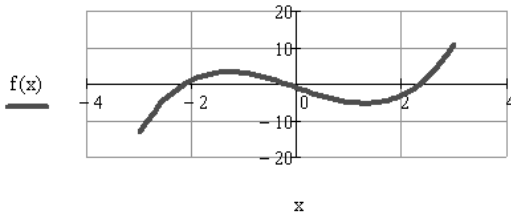
3.1. Функция `root`

Функция `root` используется для решения одного уравнения с одним неизвестным.

Обращение к функции:

`root(f(x))`, где $f(x)$ — выражение, равное нулю; x — аргумент, варьируя который, система ищет значение, обращающее функцию в нуль (рис. 3.1).

Уравнение $x^3 - 5x - 1 = 0$
начальное приближение $x := 0$
решение $\text{root}(x^3 - 5x - 1, x) = -0.202$
или $f(x) := x^3 - 5x - 1$ $x := 0$ $\text{root}(f(x), x) = -0.202$
другие корни $x := 10$ $x0 := \text{root}(f(x), x)$ $x0 = 2.33$
 $x := -5$ $x0 := \text{root}(f(x), x)$ $x0 = -2.128$
 $x := -3, -2.9..3$



Задан интервал поиска корней

$\text{root}(f(x), x, -5, -1) = -2.128$ $\text{root}(f(x), x, 1, -1) = -0.202$

$\text{root}(f(x), x, -3, 1) = -0.202$ $\text{root}(f(x), x, 1, 5) = 2.33$

Значения функции в конечных точках должны иметь противоположные знаки.

Рис. 3.1. Использование функции `root`

Функция $f(x)$ и аргумент x должны быть скалярами, то есть результат вычисления функции — число, а не вектор или матрица. Функция `root` использует итерационный метод секущих. Корень уравнения — ближайшее к начальному приближению значение x , обращающее функцию $f(x)$ в нуль. Если корней несколько,

для отыскания каждого корня необходимо задавать свое начальное приближение.

СОВЕТ

Перед началом решения желательно построить график функции, чтобы проверить, есть ли корни, то есть пересекает ли график ось абсцисс. Начальное приближение лучше всего выбрать по графику поближе к значению корня. Итерационные методы весьма чувствительны к выбору начального приближения.

Mathcad позволяет вместо начального приближения задавать диапазон значений аргумента, в котором лежит значение искомого корня (см. рис. 3.1). В этом случае обращение к функции root должно иметь 4 параметра:

$$\text{root}(f(x), x, a, b),$$

где a и b — границы интервала, в котором лежит корень уравнения. Внутри интервала не должно быть больше одного корня, так как Mathcad выводит на экран лишь один корень, лежащий внутри интервала.

ВНИМАНИЕ

Значения функции на границах интервала должны быть разного знака, иначе, возможно, корень не будет найден (см. последнюю строчку на рис. 3.1).

Если уравнение не имеет действительных корней, то есть функция $f(x)$ нигде не равна нулю, то Mathcad выводит комплексное число. В старых версиях при отсутствии действительного корня надо было вводить начальное приближение в комплексной форме (рис. 3.2).

Если функция имеет мнимый корень,
начальное приближение задается комплексным числом

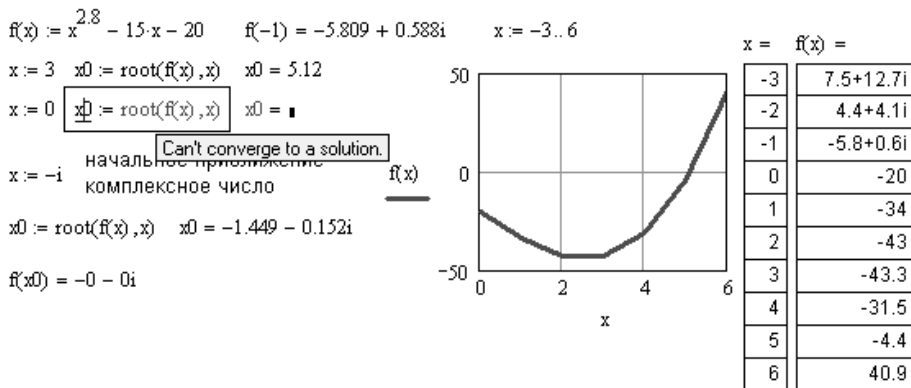


Рис. 3.2. Решение уравнения с комплексными корнями в Mathcad 11

ПРИМЕЧАНИЕ

Для ввода мнимой единицы надо ввести с клавиатуры i или j .

Подробнее об использовании комплексных чисел написано в конце главы 4 (раздел 4.15). Если уравнение имеет несколько корней, то для их нахождения можно использовать разложение функции $f(x)$ на простые множители:

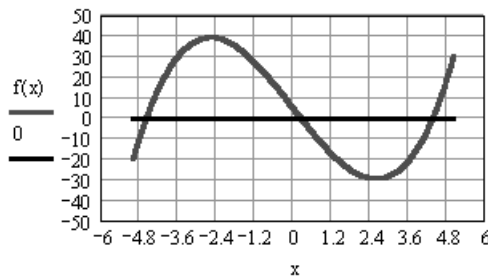
$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – корни уравнения. Начальное приближение можно задать только для первого корня. В качестве функции $f(x)$ нужно взять

$$h(x)_i = h(x)_{i-1} / (x - x_i),$$

где $h(x)_0 = f(x)$, $h(x)_1 = h(x)_0 / (x - x_1)$ и т. д. (рис. 3.3).

$f(x) := x^3 - 20x + 5$ у этой функции 3 корня
 $x := -5, -4.9 \dots 5$ диапазон значений x для вывода графика



$x := 1$	$x1 := \text{root}(f(x), x)$	$x1 = 0.2507995$
$h1(x) := \frac{f(x)}{x - x1}$	$x2 := \text{root}(h1(x), x)$	$x2 = 4.341$
$h2(x) := \frac{h1(x)}{x - x2}$	$x3 := \text{root}(h2(x), x)$	$x3 = -4.593$

Рис. 3.3. Определение трех корней уравнения

Если функция $f(x)$ имеет малый наклон вблизи искомого корня, то функция $\text{root}(f(x), x)$ может сходиться к значению, довольно далеко отстоящему от корня. В таком случае для уточнения корня необходимо уменьшить значение погрешности вычислений, задаваемое встроенной переменной TOL. Для этого

- ❑ в стандартном меню Mathcad выберите команду Tools ▶ Worksheet Options ▶ Built-In Variables (Инструменты ▶ Параметры документов ▶ Встроенные переменные);
- ❑ в открывшемся окне поменяйте значение Convergence Tolerance (TOL) (Погрешность сходимости).

Чем меньше константа TOL, тем ближе к нулю будет значение функции при найденном корне уравнения, но тем больше будет время вычисления корня.

Для повышения точности расчета корня можно заменить $f(x)$ на

$$g(x) = f(x) / \frac{d(f(x))}{dx}.$$

Корень можно найти и по графику, увеличив масштаб (рис. 3.4). Для этого необходимо:

- выделить график, щелкнув левой кнопкой мыши внутри графика;
- в главном меню Mathcad выбрать команду Format ▶ Graph ▶ Zoom (Формат ▶ График ▶ Масштаб);
- при нажатой левой кнопке мыши обвести пунктирной линией область графика вблизи искомого корня, которую надо увеличить;
- в открытом окне X-Y Zoom (Масштаб по осям X-Y) нажать кнопку Zoom.

Прямо с графика можно передать в буфер обмена численное значение корня. Для этого выполните следующие действия:

- Выделите график, щелкнув левой кнопкой мыши внутри графика.
- В главном меню Mathcad выберите команду Format ▶ Graph ▶ Trace (Формат ▶ График ▶ Трассировка).
- Щелкните левой кнопкой мыши внутри графика — появится перекрестье осей.
- Двигая мышь при нажатой левой кнопке, установите перекрестье на пересечение графика с осью абсцисс. При этом численные значения координат перекрестья появляются в открытом окне X-Y Trace (Трассировка X и Y).
- Правильно выбрав положение перекрестья, нажмите кнопки Copy X и Copy Y — численные значения будут помещены в буфер (см. рис. 3.4).
- Вне поля графика запишите имя, которое хотите дать корню, и оператор присваивания :=. Нажмите кнопку Paste (Вставить) в стандартном меню Mathcad или в контекстном меню, открывающемся при нажатии правой кнопки мыши.

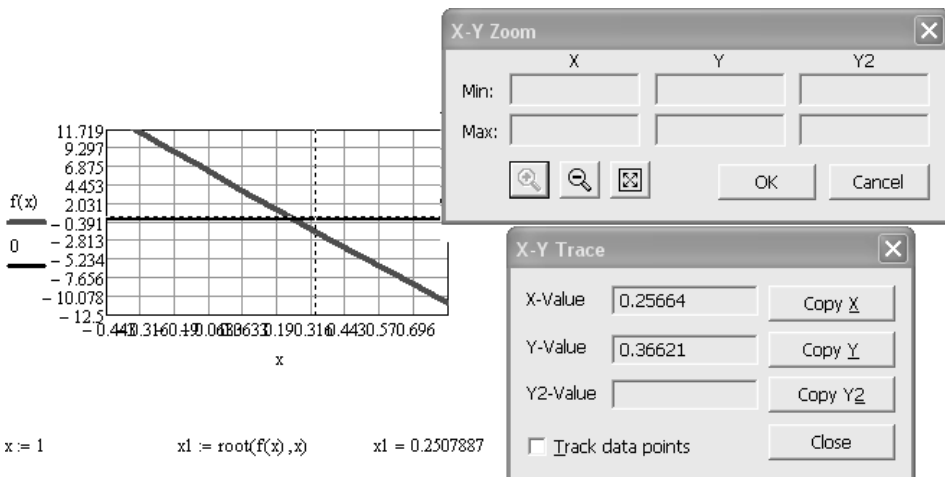


Рис. 3.4. Определение корня уравнения по графику

СОВЕТ

При работе с Mathcad постоянно пользуйтесь правой кнопкой мыши (в контекстном меню каждый раз появляются новые, наиболее нужные в данный момент функции). Щелкните правой кнопкой мыши на графике: в открывшемся контекстном меню есть пункты Zoom (Масштаб) и Trace (Трассировка).

В окне X-Y Trace есть пункт Track Data Points (Отмечать расчетные точки). Если установить этот флажок, при перемещении мыши пунктирное перекрестье на графике будет перемещаться скачками, отмечая расчетные значения функции. Если флажок снять, движение перекрестья становится плавным.

3.2. Решение уравнения с переменными параметрами

Если нужно многократно решать уравнение при изменении одного или нескольких его параметров, то необходимо создать собственную функцию, включающую функции root. Такая функция принимается Mathcad «к сведению».

Для ее вычисления надо задать значения (диапазоны значений) параметров, указанных в названии функции. Например, в функции $f(a, x) = ax - \operatorname{tg}(ax)$, варьируя параметр a , находим соответствующий каждому значению a корень уравнения x (обращающий $f(a, x)$ в нуль). Результаты расчета можно вывести в виде вектора решений x_0 или графика $x_0(a)$ (рис. 3.5). Начальное приближение при этом задается лишь один раз. Результат предыдущего вычисления является начальным приближением для последующего.

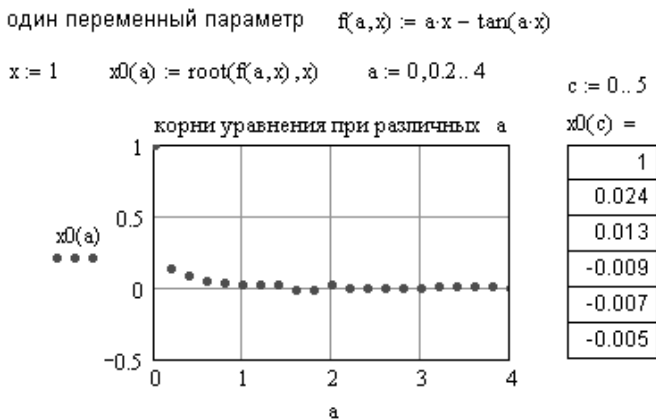


Рис. 3.5. Решение уравнения с одним переменным параметром

Решение уравнения $f(b, c, x) = x^2 + bx - c = 0$, приведенное на рис. 3.6, зависит от численных значений параметров b и c . Задавая значение одного из параметров в виде константы, а другого — в виде дискретной переменной, с помощью функции root можно найти ряд решений уравнения, соответствующих заданным зна-

чениям параметров b и c . В таблице на рис. 3.6 выведены значения корня уравнения x_0 при $c = 4$ и b — ряде значений, определяемых дискретной переменной b . На графике b — ряды значений. Так как функция `root` выводит значение одного корня, а квадратное уравнение имеет два корня, поменяйте значение начального приближения для вывода таблицы и графика, соответствующих второму корню.

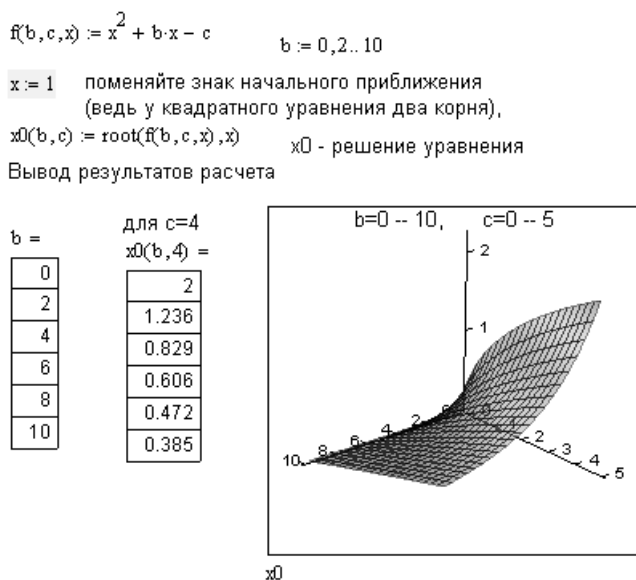


Рис. 3.6. Решение уравнения с двумя переменными параметрами

При построении графика поверхности $x_0(b, c)$ значения параметров $b = 0 - 10$ и $c = 0 - 5$ заданы с помощью меню 3-D Plot Format ▶ Quick Plot Data (Формат 3D-графика ▶ Данные быстрого графика), открывающегося после двойного щелчка мышью в поле графика.

3.3. Нахождение корней полинома. Функция polyroots

Для нахождения корней полинома можно использовать функцию `polyroots(K)`, которая определяет все корни полинома одновременно. Здесь K — вектор коэффициентов полинома, начиная со свободного члена (рис. 3.7). Нулевые коэффициенты опускать нельзя. Если полином имеет N корней (с учетом кратности), то вектор K включает в себя $N + 1$ коэффициент. Начальное приближение вводить не надо.

СОВЕТ

Если исходный полином записан не в развернутом виде, а, например, как произведение полиномов, в этом случае коэффициенты можно определить, используя меню `Symbolics` (Символьные операции), как показано в главе 5 и на рис. 3.8.

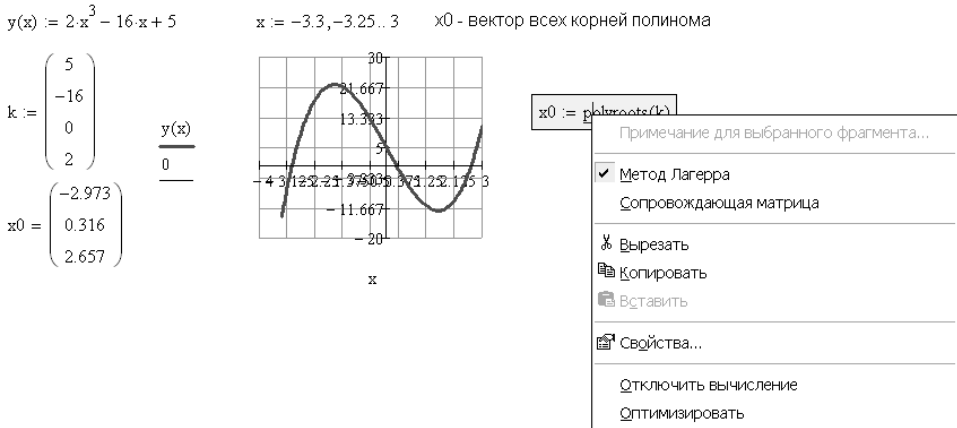


Рис. 3.7. Нахождение корней полинома с помощью функции polyroots

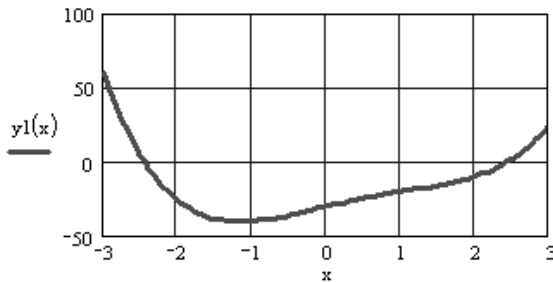
$y1(x) := (x^2 - 2 \cdot x + 5) \cdot (x^2 - 6)$ исходное выражение

для определения коэффициентов используем меню

- выделите **x** в выражении
- в меню **Symbolic** нажмите **Polynomial Coefficient**

$(x^2 - 2 \cdot x + 5) \cdot (x^2 - 6)$ has coefficients $\begin{pmatrix} -30 \\ 12 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k := \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x := -3, -2.95 \dots 3$



$x0 := \text{polyroots}(k)$ $x0 = \begin{pmatrix} -2.449 \\ 1 - 2i \\ 1 + 2i \\ 2.449 \end{pmatrix}$

Рис. 3.8. Нахождение корней полинома при неявном задании коэффициентов

Для функции polyroots можно выбрать один из двух численных методов: метод полиномов Лагерра (он установлен по умолчанию) или метод сопровождающей матрицы (см. рис. 3.7).

Для смены метода сделайте описанные далее операции:

1. Щелкните правой кнопкой мыши на слове `polyroots`, вызвав контекстное меню.
2. В открывшемся меню выберите `LaGerre` (Метод Лагерра) или `Companion Matrix` (Сопровождающая матрица).
3. Щелкните мышью вне поля функции — произойдет пересчет корней в соответствии с выбранным методом.

Чтобы оставить выбор за `Mathcad`, в контекстном меню установите флажок `AutoSelect` (Автоматический выбор).

Графики функций, изображенные на рис. 3.7 и 3.8, построены для проверки правильности определения корней.

3.4. Решение систем уравнений

Для решения систем уравнений нужно использовать вычислительный блок следующего вида:

1. Начальные приближения для всех переменных.
2. Ключевое слово `Given` (Дано).
3. Система уравнений (при записи уравнений надо использовать жирный знак равенства (клавиши `Ctrl+=`), так как это не знак присвоения значения, а оператор отношения).
4. Ограничения на поиск решения в виде неравенств, если они есть.
5. Выражение, содержащее функцию `find`, с неизвестными в качестве параметров.

Результат расчета — вектор решения системы. Вычислительный блок позволяет решать системы, содержащие от 1 до 200 уравнений.

`Mathcad` допускает использование двухсторонних неравенств типа $a \leq x \leq b$. Операторы \leq и \geq выбираются на математической панели.

Решение, выданное функцией `find`, желательно проверить, подставив в уравнения найденные корни, так как в зависимости от начального приближения `Mathcad` может вывести корни, не имеющие физического смысла.

На рис. 3.9 показана проверка решения системы трех уравнений путем подстановки корней в уравнения и путем построения графиков уравнений и определения корней как точек пересечения поверхностей. На графике видна точка Z пересечения трех поверхностей, координаты которой являются решением системы, обращающим все уравнения в тождества.

При обычном ускоренном построении графика поверхности значения аргументов выбираются `Mathcad` автоматически в диапазоне от -5 до 5 , что в нашем примере приводит к делению на нуль и невозможности построения графика. Пределы значений координат можно изменить (см. главу 15). Для этого дважды щелкните мышью в поле графика и в открывшемся окне выберите страницу `Quick Plot Data` (Данные быстрого графика), на которой введите необходимые пределы изменения переменных.

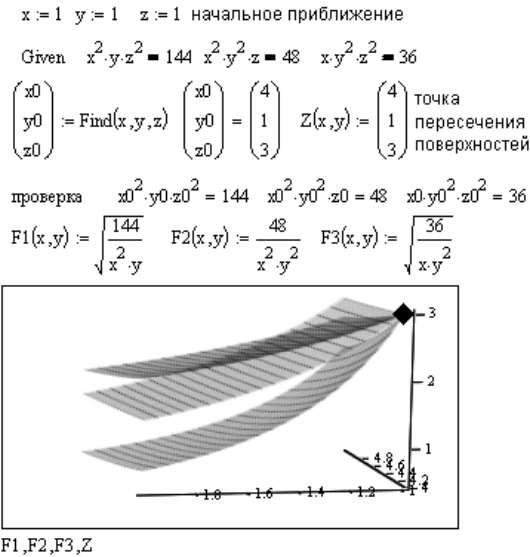


Рис. 3.9. Решение системы уравнений с помощью функции find

Функция find реализует градиентные численные методы и предлагает на выбор три метода. Щелкните правой кнопкой мыши на названии функции find. В открывшемся контекстном меню и его подменю выберите нужный метод (рис. 3.10):

- Linear (Линейный метод) — метод касательной;
- Nonlinear (Нелинейный метод).

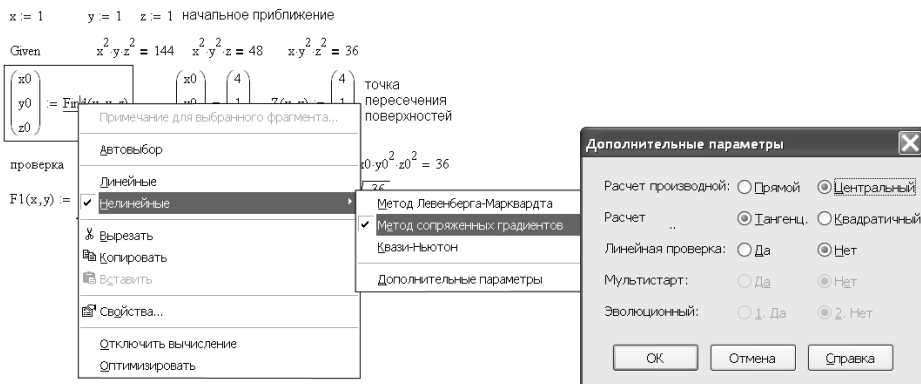


Рис. 3.10. Выбор метода решения системы уравнений

Нелинейных методов три:

- Conjugate Gradient (Метод сопряженных градиентов);
- Quasi-Newton (Квази-ньютоновский метод);
- Levenberg-Marquart (Метод Левенберга).

Кроме выбора самого метода, нажав кнопку **Advanced Options** (Дополнительные параметры), можно выбрать:

- оценку производной конечными разностями (**Derivative Estimation**):
 - Forward** (Вперед) — правая двухточечная схема;
 - Central** (Центральная) — трехточечная симметричная схема;
- оценку переменной (**Variable Estimation**):
 - Tangent** (Касательная) — касательная — прямая линия,
 - Quadratic** (Квадратичная) — касательная — парабола;
- проверку линейности:
 - Yes** (Да);
 - No** (Нет).

Если вы уверены, что нелинейности всех функций, входящих в уравнения, мало влияют на значения их частных производных, выберите при проверке нелинейности пункт **No**. В этом случае производные будут приняты постоянными и не будут вычисляться на каждом шаге, что уменьшит время расчета.

К выбору метода расчета стоит обращаться, если вы хорошо разбираетесь в численных методах и тогда, когда Mathcad не может найти решение. В большинстве же случаев лучше доверить выбор метода Mathcad, отметив пункт **AutoSelect** (Автоматический выбор).

$$f1(a, b, x, y) := x^3 \cdot \cos\left(\frac{b}{3} \cdot y\right) - a \cdot b \quad f2(a, b, x, y) := y^3 - b \sin\left(\frac{a}{3} \cdot x\right)$$

$x := 1 \quad y := 1$ начальные приближения

Given $f1(a, b, x, y) = 0 \quad f2(a, b, x, y) = 0$

$z(a, b) := \text{Find}(x, y) \quad x0(a, b) := z(a, b)_0 \quad y0(a, b) := z(a, b)_1$

один из параметров делаем константой, другой варьируем

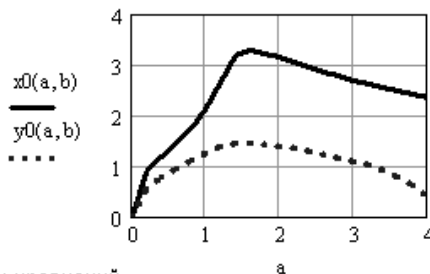
$b := 3$

$a := 0..4$ для таблицы

$x0(a, b) = \quad y0(a, b) =$

0	0
2.115	1.248
3.138	1.375
2.693	1.092
2.344	0.37

$a := 0, 0.2..4$ для графика



это корни x и y системы уравнений для заданных значений a и b

Рис. 3.11. Решение системы уравнений с переменными параметрами