

7. Элементы механики жидкостей

Плотность ρ [кг/м³] — масса вещества, заключенная в единице объема:

$$\rho = \frac{m}{v},$$

где m — масса объема v .

Давление p [Па] — сила F , действующая на единичную площадь S :

$$p = \frac{F}{S}.$$

Гидростатическое давление столба жидкости:

$$p = \rho gh,$$

где h — разность высот уровней жидкости.

Закон Паскаля — давление, производимое на жидкость или газ, передается одинаково во всех направлениях.

Сила Архимеда (выталкивающая) — выталкивающая сила, действующая на тело в жидкости или газе:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} v_{\text{т}} g,$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости или газа, $v_{\text{т}}$ — объем тела, погруженного в жидкость, g — ускорение свободного падения.

Условие плавания тел — сила Архимеда не меньше силы тяжести;

$$F_A > mg \text{ или } \rho_{\text{ж}} > \rho_{\text{ср.т.}},$$

где $\rho_{\text{ср.т.}}$ — средняя плотность тела.

Уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где ρ — плотность жидкости, V_1, V_2 — скорости течения жидкости через разные участки трубы, h_1, h_2 — высоты центров поперечного сечения трубы, p_1, p_2 — давление в центрах поперечного сечения трубы.

ПРИМЕРЫ

1. Две трубки диаметром $d = 4 \text{ см}$ ($= 0,04 \text{ м}$) каждая представляют собой сообщающиеся сосуды. В одно колено сосуда заливают воду объемом $v = 0,25 \text{ л}$ ($= 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$) (плотность $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$), в другое $v = 0,25 \text{ л}$ ртути (плотность $\rho_{\text{рт}} = 13\,546 \text{ кг/м}^3$). Каковы будут высоты жидкостей в обоих коленах? Объемом изогнутой части трубки пренебречь.

Решение

Гидростатическое давление в обоих коленах должно быть одинаковым (иначе под действием избыточного

давления жидкость придет в движение, и оно будет продолжаться, пока давление не уравняется). Плотность ртути больше, следовательно, высота столба жидкости в коленах с ртутью должна быть ниже. Ниже пунктирной линии в обеих трубках ртуть, выше пунктирной линии: слева — вода, справа — ртуть. Давление p , оказываемое жидкостями выше пунктирной линии, должно быть одинаково и определяется:

$$p = \rho g h \Rightarrow \rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} = \rho_{\text{в}} g h_{\text{в}}.$$

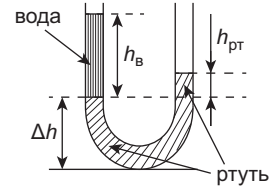
Высоту уровня воды $h_{\text{в}}$ можно найти из объема:

$$v = S h_{\text{в}} = \frac{\pi d^2}{4} h_{\text{в}},$$

где S — площадь поперечного сечения трубки. Рассчитаем высоты уровней воды и ртути от пунктирной линии:

$$h_{\text{в}} = \frac{4v}{\pi d^2},$$

$$h_{\text{рт}} = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} h_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \frac{4v}{\pi d^2}.$$



Оставшийся объем ртути $v_{\text{ост}}$ будет поровну распределен в обоих коленах:

$$\Delta h = \frac{v_{\text{ост}}}{2S} = \frac{2v_{\text{ост}}}{\pi d^2}.$$

Очевидно, что:

$$v_{\text{ост}} = v - h_{\text{рт}} S = v - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \frac{4v}{\pi d^2} S = v \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right).$$

Значит:

$$\Delta h = \frac{2v}{\pi d^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right).$$

Полная высота $H = h + \Delta h$:

$$H_{\text{в}} = \frac{4v}{\pi d^2} + \frac{2v}{\pi d^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right);$$

$$H_{\text{рт}} = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \frac{4v}{\pi d^2} + \frac{2v}{\pi d^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right).$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} H_{\text{в}} &= \frac{2v}{\pi d^2} \left(3 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right) = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 0,04^2} \left(3 - \frac{1000}{13\,546} \right) = \\ &= 0,29 \text{ м} = 29 \text{ см}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{рт}} &= \frac{2v}{\pi d^2} \left(1 + \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}}} \right) = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 0,04^2} \left(1 + \frac{1000}{13\,546} \right) = \\ &= 0,107 \text{ м} = 10,7 \text{ см}. \end{aligned}$$

2. Медный шар ($\rho_{\text{cu}} = 8900 \text{ кг/м}^3$), имеющий полость, плавает, наполовину погружившись в воду. Определите, во сколько раз объем полости меньше объема шара.

Решение

На шар действуют две силы, действие которых скомпенсировано: это сила тяжести mg , где m — масса меди, и сила Архимеда:

$$F_A = \rho \frac{1}{2} v g,$$

где $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, v — объем шара (по условию только половина его в воде, поэтому в формуле $\frac{1}{2}$). Приравняем эти силы:

$$mg = \rho \frac{1}{2} v g.$$

Массу меди можно определить как:

$$m = \rho_{\text{cu}} v_{\text{cu}},$$

где v_{cu} — объем меди. Учтем, что шар состоит из меди и полости:

$$v = v_{cu} + v_0,$$

где v_0 — объем полости, то есть

$$m = \rho_{cu} (v - v_0).$$

Условие равенства сил:

$$\rho_{cu} (v - v_0) g = \rho \frac{1}{2} v g$$

или

$$\rho_{cu} \left(1 - \frac{v_0}{v} \right) = \rho \frac{1}{2}.$$

Окончательно:

$$\frac{v_0}{v} = 1 - \frac{\rho}{2\rho_{cu}} = 1 - \frac{1000}{2 \cdot 8900} = 0,94.$$