1. Основные характеристики детерминированных сигналов

В технике под термином «*сигнал*» подразумевают величину, каким-либо образом отражающую состояние физической системы. В радиотехнике сигналом называют функцию времени $s(t)$, описывающую изменение напряжения (чаще всего) или тока.

В данной главе рассматриваются основы спектрального и корреляционного анализа детерминированных, то есть полностью известных, сигналов.

1.1. Сигналы, модели сигналов

Заданная аналитически (*детерминированная*, определенная в любой момент времени), функция $s(t)$ становится абстрактной математической *моделью сигнала*, не связанной с его физическим характером и удобной для изучения.

Примеры математических моделей детерминированных радиотехнических сигналов.

- Непрерывный сигнал (гармоническое колебание):

$$s(t) = U\cos\omega_0 t, \quad s(t) = U\sin\omega_0 t\,. \tag{1.1}$$

Область определения гармонического сигнала $t \in (-\infty, \infty)$.

- Непрерывный сигнал (гауссов *импульс*):

$$s(t) = Ue^{-\alpha^2 t^2},\ t \in (-\infty, \infty). \tag{1.2}$$

- Непрерывный сигнал (экспоненциальный импульс):

$$s(t) = \begin{cases} Ue^{-\alpha t}, & t \in [0, \infty), \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

- *Финитный*, то есть принимающий отличные от нуля значения на *ограниченном* интервале времени, сигнал (прямоугольный *видеоимпульс*):

$$s(t) = \begin{cases} U, & t \in [-T/2, T/2], \\ 0, & t \notin [-T/2, T/2]. \end{cases} \tag{1.4}$$

Заметим, что термин «*видео*» в этом контексте совсем не подразумевает отношения сигнала именно к телевизионной технике. Смысл термина будет разъяснен в ходе дальнейшего изложения.

- Финитный сигнал (треугольный видеоимпульс):

$$s(t)=\begin{cases}\dfrac{U}{T}(T-t), & t\in[0,T],\\ 0, & t\notin[0,T].\end{cases} \tag{1.5}$$

- Периодический сигнал:

$$s_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t-kT),\ k=0,\pm1,\pm2\dots, \tag{1.6}$$

где $r(t)$ — финитный на интервале T (периоде последовательности) сигнал; иногда говорят о «представительном» сигнале последовательности.

- *Дискретный* сигнал, являющийся последовательностью *отсчетов* (чисел):

$$s(kT)=e^{-\alpha kT},\ k=0,\ 1,\ 2\dots \tag{1.7}$$

Тестовые сигналы. Особое место среди математических моделей сигналов занимают модели *тестовых*, испытательных или пробных сигналов. Они широко используются в теоретических исследованиях, а приближенно отвечающие им физические (радиотехнические) сигналы — в экспериментальной радиотехнической и радиоизмерительной практике.

Известным тестовым сигналом является *единичная ступенчатая функция*, *функция включения*, или *функция Хевисайда*:

$$\sigma(t)=1(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{1.8}$$

Важнейшим тестовым радиотехническим сигналом является *дельта-функция*, или *функция Дирака* $\delta(t)$, которая определяется соотношениями

$$1)\ \delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0,\\ 0, & t\ne 0;\end{cases} \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \text{ (площадь } \delta\text{-функции).} \tag{1.9}$$

Из первой части определения (1.9) следует, что $\delta(t)$ существует лишь при аргументе $t=0$, поэтому справедливо:

$$1)\ \delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0,\\ 0, & t\ne t_0;\end{cases} \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1. \tag{1.10}$$

Из второй части определения (1.9) следует, что размерность $\delta(t)$ обратна размерности аргумента t. Отметим также важное соотношение, определяющее *фильтрующее свойство* δ-функции,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0)\,, \tag{1.11}$$

то есть то, что определенный интеграл, подынтегральная функция которого имеет вид $f(t)\delta(t-t_0)$, *равен значению функции* $f(t)$ *с аргументом* $t = t_0$, *при котором* δ-*функция не равна нулю.*

Функция $\delta(t)$ относится к так называемым *обобщенным*, *символическим* функциям. С ее помощью, например, определяют не существующую в классическом смысле производную функции Хевисайда

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t)\cdot \tag{1.12}$$

В свою очередь, функция Хевисайда (1.8) может быть на основании (1.12) определена как

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda\,. \tag{1.13}$$

Тестовыми являются гармонический сигнал (1.1) и гармоническая (квазигармоническая) функция включения $s(t) = U\cos\omega_0 t$, $t \ge 0$, которую, используя функцию Хевисайда, можно записать как $s(t) = U\sigma(t)\cos\omega_0 t$.

Радиосигнал. Так называют сигнал, модель которого удобно представлять в форме

$$u(t) = U(t)\cos\{\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0\} = U(t)\cos\psi(t)\,. \tag{1.14}$$

Выделяют *огибающую* $U(t)$, *полную фазу* радиосигнала $\psi(t)$ и фазовую функцию $\varphi(t)$. Частоту $\omega_0 = 2\pi f_0$ называют *несущей частотой*. Используя модель (1.14), обычно предполагают, что огибающая $U(t)$ и фазовая функция $\varphi(t)$ изменяются за время $T_0 = 2\pi/\omega_0$ (период несущей частоты) незначительно (если это предположение не выполняется, то может оказаться удобнее иная форма представления сигнала). Очевидно, что представления многих сигналов могут рассматриваться как частные случаи выражения (1.14), например, при $U(t) = U = \text{const}$, или при $\omega_0 = 0$, или при $\varphi(t) = 0$ и т. д. В последнем случае φ_0 называют *начальной фазой*.

Простейшим радиосигналом является гармоническая функция (1.1).

Если огибающая $U(t)$ — финитная функция, то радиосигнал (1.14) называют *радиоимпульсом*, огибающую $U(t)$ — *соответствующим* ему *видеоимпульсом*, а ω_0 — *частотой заполнения* радиоимпульса (при $\varphi(t) = \varphi_0$). Выбрав в качестве огибающей прямоугольный видеоимпульс (1.4) и приняв $\varphi(t) = \varphi_0 = 0$, получим радиосигнал в виде прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} U\cos\omega_0 t, & t \in [-T/2, T/2], \\ 0, & t \notin [-T/2, T/2]. \end{cases} \tag{1.15}$$

Если огибающая $U(t)$ — непрерывная функция, определенная на интервалах $t \in (-\infty, \infty)$ или $t \in (0, \infty)$, то ее иногда называют *видеосигналом, соответствующим* радиосигналу (1.14).

1.2. Обобщенный ряд Фурье

Для анализа сигналов очень важны методы представления математической модели сигнала в виде разложения ее в функциональный ряд. Разложения по *линейно независимым* и *ортогональным* системам функций (базисам) широко используются при решении многих задач физики и математики.

Бесконечная (в общем случае) система (последовательность) непрерывных на интервале T функций $\{\varphi_i(t), i = 0, 1, 2, ...\}$ является ортогональной на T, если

$$\int_T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|\varphi_i\|^2, & i = j. \end{cases} \tag{1.16}$$

где величина

$$\|\varphi_i\| = \sqrt{\int_T \varphi_i^2(t)dt} \neq 0 \tag{1.17}$$

называется *нормой* системы функций $\{\varphi_i(t)\}$, при этом никакая из функций системы не равна тождественно нулю (неравенство в соотношении (1.17), определяющем $\|\varphi_i\|$).

Представление произвольной кусочно-непрерывной модели сигнала $s(t)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty, \tag{1.18}$$

в виде линейной комбинации взвешенных функций $\{\varphi_i(t)\}$

$$s(t) = C_0\varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + \ldots + C_i\varphi_i(t) + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\varphi_i(t) \tag{1.19}$$

называется разложением в *обобщенный ряд* Фурье. Линейная независимость системы $\{\varphi_i(t)\}$ обеспечивает *единственность* разложения (1.19).

Умножив обе части уравнения (1.19) на $\varphi_i(t)$ и интегрируя по интервалу T, получим соотношение, в котором справа (с учетом (1.16)) стоит единственный отличный от нуля член:

$$\int_T s(t)\varphi_i(t)dt = \int_T C_i\varphi_i(t)\varphi_i(t)dt = C_i\|\varphi_i\|^2,$$

откуда следует выражение для i-го коэффициента обобщенного ряда Фурье:

$$C_i = \frac{1}{\|\varphi_i\|^2}\int_T s(t)\varphi_i(t)dt. \tag{1.20}$$

Совокупность коэффициентов C_i называется *спектром* сигнала $s(t)$ в системе $\{\varphi_i(t)\}$ и *полностью определяет* сигнал.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1

Проще всего коэффициенты C_i рассчитываются в том случае, когда система функций $\{\varphi_i(t)\}$ является не только ортогональной, но и *ортонормированной*, то есть подчиняется следующим условиям:

$$\int_T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{1.21}$$

Однако в ортонормированную может быть преобразована любая система линейно независимых функций, поэтому условие (1.21) никак не влияет на область применимости разложения (1.19).

Неравенство Бесселя. Разложение сигнала в обобщенный ряд Фурье по *ортогональной* системе функций обладает важным свойством: если нужно получить *приближенное* представление сигнала в виде линейной комбинации *конечного* числа n взвешенных базисных функций $\{\varphi_i(t)\}$, то *невязка* (ошибка представления сигнала) Δs, которую определяют как

$$\Delta s = \int_T \left(s(t) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i(t) \right)^2 dt, \tag{1.22}$$

будет минимальной, если коэффициенты такого разложения совпадают с коэффициентами обобщенного ряда Фурье, рассчитанными по формуле (1.20):

$$a_i = C_i,$$

то есть усеченный ряд Фурье обеспечивает *минимальную ошибку* представления сигнала в так называемом *конечном* базисе.

Покажем это. Для этого раскроем квадрат разности в (1.22), преобразуем квадрат суммы в двойную сумму и поменяем местами суммирование и интегрирование:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_T \left(s^2(t) - 2s(t)\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i(t) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i(t) \right)^2 \right) dt = \\ &= \int_T s^2(t)dt - 2\int_T \left(s(t)\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i(t) \right) dt + \int_T \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i(t) \right)^2 dt = \\ &= \|s\|^2 - 2\sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i \int_T s(t)\varphi_i(t)dt \right) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \left(a_i a_j \int_T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt \right), \end{aligned} \tag{1.23}$$

где по аналогии с (1.17) интеграл $\int_T s^2(t)dt = \|s\|^2$ есть квадрат *нормы модели сигнала* $s(t)$.

Учтя в (1.23) соотношения (1.20) и (1.16), получаем:

$$\Delta s = \|s\|^2 - 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i C_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \|\varphi_i\|^2 = \|s\|^2 - \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2 \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(C_i - a_i \right)^2 \|\varphi_i\|^2.$$

Отсюда видно, что при $a_i = C_i$ невязка минимальна и равна

$$\Delta s = \|s\|^2 - \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2 \|\varphi_i\|^2 . \qquad (1.24)$$

Поскольку невязка, согласно ее определению (1.22), неотрицательна, из (1.24) следует *неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_i^{\,2} \|\varphi_i\|^2 \le \|s\|^2 , \qquad (1.25)$$

справедливое для любой линейно независимой и ортогональной системы функций $\{\varphi_i(t)\}$.

Система $\{\varphi_i(t)\}$ называется *полной*, если, увеличивая число членов усеченного ряда, невязку $\Delta s_{\min}$ можно сделать сколь угодно малой.

Обобщенный ряд Фурье в комплексном базисе. Если функции системы $\{\varphi_i(t)\}$ принимают комплексные значения, приведенные определения могут быть обобщены:

- ортогональность системы функций:

$$\int_T \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ \|\varphi_i\|^2, & i = j; \end{cases}$$

- вычисление коэффициентов ряда Фурье:

$$C_i = \frac{1}{\|\varphi_i\|^2} \int_T s(t)\varphi_i^*(t)dt, \qquad (1.26)$$

где $\varphi_i^*(t)$ есть функция, комплексно-сопряженная $\varphi_i(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2

Разложение модели сигнала (или другой функции) в функциональный ряд в радиотехнике проводят при решении разнообразных задач, основными из которых являются либо спектральный анализ функции, либо оптимальная по определенным критериям аппроксимация функции.

Спектральный анализ чаще всего проводят на базе ортогональных систем, образованных основными *тригонометрическими* функциями. В главе 6 рассматривается своеобразная ортогональная система базисных функций для разложения в так называемый *ряд Котельникова*.

Вторая задача ассоциируется, как правило, с так называемыми нелинейными преобразованиями сигналов (глава 7) либо с задачами синтеза сигналов и цепей.