Глава 7 Графы

Эта глава открывает заключительную часть книги, целиком посвященную графам и алгоритмам на них. Среди дисциплин и методов дискретной математики теория графов и особенно алгоритмы на графах находят наиболее широкое применение в программировании. Как показано в разделе 7.5, между понятием графа и понятием бинарного отношения, рассмотренным в главе 1, имеется глубокая связь — можно сказать, что это равнообъёмные понятия. Возникает естественный вопрос, почему же тогда графам оказывается столь заметное предпочтение при изучении дискретной математики и программирования? Дело в том, что теория графов предоставляет очень удобный *язык* для описания программных (да и многих других) моделей. Этот тезис можно пояснить следующей аналогией. Понятие отношения также можно полностью выразить через понятие множества (см. замечание в п. 1.4.1 и далее). Однако независимое определение понятия отношения *удобнее* — введение специальных терминов и обозначений упрощает изложение теории и делает её более понятной. То же относится и к теории графов. Стройная система специальных терминов и обозначений теории графов позволяет просто и доступно описывать сложные и тонкие вещи. Особенно важна возможность наглядной графической интерпретации понятия графа (см. п. 7.1.4). Само название «граф» подразумевает наличие графической интерпретации. Картинки часто позволяют сразу «усмотреть» суть дела на интуитивном уровне, дополняя и украшая утомительные текстовые доказательства и сложные формулы. Эта глава практически полностью посвящена описанию языка теории графов.

7.1. Определения графов

Как это ни удивительно, но для понятия «граф» нет общепризнанного единого определения. Разные авторы, особенно применительно к разным приложениям, называют словом «граф» очень похожие, но все-таки различные объекты. Здесь используется терминология [28], которая была выбрана из соображений максимального упрощения определений и доказательств.

7.1.1. История теории графов

Теория графов многократно переоткрывалась разными авторами при решении различных прикладных задач.

1. *Задача о Кёнигсбергских мостах.* На рис. 7.1 представлен схематический план центральной части города Кёнигсберг (ныне Калининград), включающий два берега реки Перголя, два острова на ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том, чтобы обойти все четыре участка суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. В 1736 году Эйлером[1] было показано, что решения этой задачи не существует. Точнее говоря, Эйлер получил необходимое и достаточное условие существования решения для всех задач типа задачи о Кёнигсбергских мостах (см. п. 10.2.1).

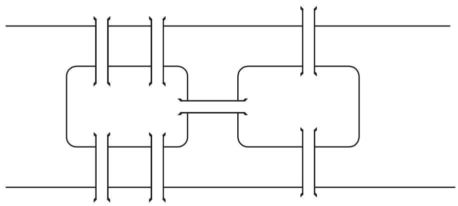

Рис. 7.1. Иллюстрация к задаче о Кёнигсбергских мостах

2. *Задача о трёх домах и трёх колодцах.* Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Требуется провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались (рис. 7.2). Эта задача также не имеет решения. В 1930 году Куратовским[1] было доказано намного более сильное утверждение, а именно достаточность условия существования решения для всех задач типа задачи о трёх домах и трёх колодцах (необходимость этого условия была известна и ранее, см. п. 10.8.2).

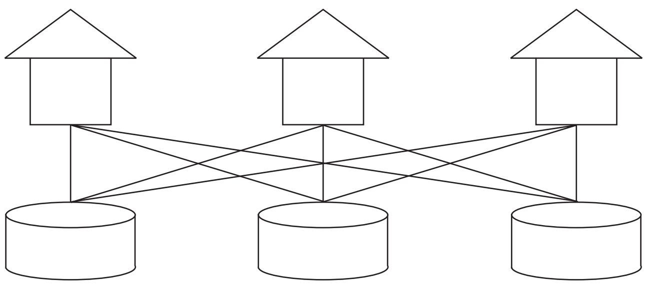

Рис. 7.2. Иллюстрация к задаче о трёх домах и трёх колодцах

3. *Задача о четырёх красках.* Разделение плоскости на неперекрывающиеся области называется *картой*. Области на карте называются соседними, если они имеют общую границу. Задача состоит в раскрашивании карты таким образом, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом (рис. 7.3). С конца XIX века известна гипотеза, что для этого достаточно четырёх красок. В 1976 году Аппель и Хейкен опубликовали решение задачи

[1] Леонард Эйлер (1707–1783).

[1] Казимир Куратовский (1896–1979).

о четырёх красках, которое базировалось на переборе вариантов с помощью компьютера.

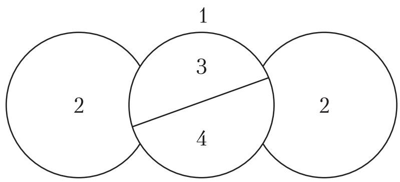

Рис. 7.3. Иллюстрация к задаче о четырёх красках

ОТСТУПЛЕНИЕ

Решение задачи о четырёх красках Аппелем и Хейкеном «программным путем» явилось прецедентом, породившим бурную дискуссию, которая отнюдь не закончена. Суть опубликованного решения состоит в том, чтобы перебрать большое, но конечное число (около 2000) типов потенциальных контрпримеров к теореме о четырёх красках и показать, что ни один случай контрпримером не является. Этот перебор был выполнен программой примерно за тысячу часов работы суперкомпьютера. Проверить «вручную» полученное решение невозможно — объём перебора выходит далеко за рамки человеческих возможностей. Многие математики ставят вопрос: можно ли считать такое «программное доказательство» действительным доказательством? Ведь в программе могут быть ошибки... Методы формального доказательства правильности программ не применимы к программам такой сложности, как обсуждаемая. Тестирование не может гарантировать отсутствие ошибок и в данном случае вообще невозможно. Таким образом, остаётся уповать на программистскую квалификацию авторов и верить, что они всё сделали правильно.

7.1.2. Основное определение

Графом $G(V,E)$ называется совокупность двух множеств — непустого множества V (множества *вершин*) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E — множество *рёбер*),

$$G(V,E) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle V;E\rangle\,,\quad V \neq \varnothing,\quad E \subset 2^V \ \&\ \forall\, e \in E\ \ (|e| = 2)\,.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Легко видеть, что любое множество E двухэлементных подмножеств множества V определяет симметричное бинарное отношение на множестве V. Поэтому можно считать, что

$$E \subset V \times V,\quad E = E^{-1}$$

и трактовать ребро не только как множество $\{v_1, v_2\}$, но и как пару (v_1, v_2).

Число вершин графа G обозначим p, а число рёбер — q:

$$p \stackrel{\text{Def}}{=} p(G) \stackrel{\text{Def}}{=} |V|,\quad q \stackrel{\text{Def}}{=} q(G) \stackrel{\text{Def}}{=} |E|.$$

Если хотят явно упомянуть числовые характеристики графа, то говорят, (p,q)-граф.

7.1.3. Смежность

Пусть v_1, v_2 — вершины, $e = (v_1, v_2)$ — соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e *инцидентны*, ребро e и вершина v_2 также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются *смежными*. Множество вершин, смежных с вершиной v, называется *множеством смежности* (или *окрестностью*) вершины v и обозначается $\Gamma^+(v)$:

$$\Gamma^+(v) \stackrel{\text{Def}}{=} \{u \in V \mid (u, v) \in E\}, \qquad \Gamma^*(v) \stackrel{\text{Def}}{=} \Gamma^+(v) + v.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Если не оговорено противное, то символ Γ без индекса подразумевает Γ^+, то есть саму вершину в окрестность не включают.

Очевидно, что $u \in \Gamma(v) \iff v \in \Gamma(u)$. Если $A \subset V$ — множество вершин, то $\Gamma(A)$ — множество всех вершин, смежных с вершинами из A:

$$\Gamma(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \{u \in V \mid \exists\, v \in A \;\; (u \in \Gamma(v))\} = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v).$$

7.1.4. Диаграммы

Обычно граф изображают *диаграммой*: вершины — точками (или кружками), рёбра — линиями.

Пример. На рис. 7.4 приведен пример диаграммы графа, имеющего четыре вершины и пять рёбер. В этом графе вершины v_1 и v_2, v_2 и v_3, v_3 и v_4, v_4 и v_1, v_2 и v_4 смежны, а вершины v_1 и v_3 не смежны. Смежные рёбра: e_1 и e_2, e_2 и e_3, e_3 и e_4, e_4 и e_1, e_1 и e_5, e_2 и e_5, e_3 и e_5, e_4 и e_5. Несмежные рёбра: e_1 и e_3, e_2 и e_4.

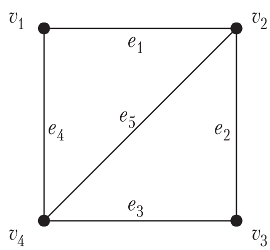

Рис. 7.4. Диаграмма графа

7.1.5. Орграфы, псевдографы, мультиграфы и гиперграфы

Часто рассматриваются следующие родственные графам объекты:

1. Если элементами множества E являются *упорядоченные* пары (то есть $E \subset \subset V \times V$), то граф называется *ориентированным* (или *орграфом*). В этом случае элементы множества V называются *узлами*, а элементы множества E — *дугами*.
2. Если элементом множества E может быть пара *одинаковых* (не различных) элементов V, то такой элемент множества E называется *петлей*, а граф называется *графом с петлями* (или *псевдографом*).
3. Если E является не множеством, а *мультимножеством*, содержащим некоторые элементы по нескольку раз, то эти элементы называются *кратными рёбрами*, а граф называется *мультиграфом*.
4. Если элементами множества E являются не обязательно двухэлементные, а *любые* (непустые) подмножества множества V, то такие элементы множества E называются *гипердугами*, а граф называется *гиперграфом*.
5. Если задана функция $F\colon V \to M$ и (или) $F\colon E \to M$, то множество M называется множеством *пометок*, а граф называется *помеченным* (или *нагруженным*). В качестве множества пометок обычно используются буквы или целые числа. Если функция F инъективна, то есть разные вершины (рёбра) имеют разные пометки, то граф называют *нумерованным*.

ЗАМЕЧАНИЕ

Отношение смежности является в некотором смысле определяющим для графов и подобных им объектов (см. разделы 7.4 и 7.5). При этом следует учитывать особенности каждого типа объектов. В орграфе вершина v смежна с вершиной u, если существует дуга (u, v). При этом вершина u может быть несмежна с вершиной v. Отношение смежности в графе симметрично, а в орграфе оно вовсе не обязано быть симметричным. В графе обычно считают отношение смежности рефлексивным, то есть полагают, что вершина смежна сама с собой. В псевдографе, напротив, вершину не считают смежной с собой, если у неё нет петли. В гиперграфе две вершины считаются смежными, если они принадлежат одному гиперребру. В гиперорграфе гипердуга обычно проводится из одного узла в множество узлов (возможно, пустое). В таком случае отношение смежности оказывается уже не бинарным отношением на V, а отношением из V в 2^V. Эти и подобные естественные вариации определений обычно считают ясными из контекста.

Далее выражение «граф $G(V, E)$» означает неориентированный непомеченный граф без петель и кратных рёбер с множеством вершин V и множеством рёбер E.

7.1.6. Изоморфизм графов

Говорят, что два графа, $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, *изоморфны* (обозначается $G_1 \sim \sim G_2$, или $G_1 = G_2$), если существует биекция $h\colon V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность (см. п. 2.1.6):

$$e_1 = (u, v) \in E_1 \iff e_2 = \bigl(h(u), h(v)\bigr) \in E_2.$$

ТЕОРЕМА. *Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.*

Доказательство. Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами:

[Рефлексивность] $G \sim G$, где требуемая биекция есть тождественная функция.

[Симметричность] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h, то $G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1}.

[Транзитивность] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g, то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \circ h$. □

Графы рассматриваются *с точностью до изоморфизма*, то есть рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма (см. п. 2.1.5).

Пример. Три внешне различные диаграммы, приведённые на рис. 7.5, являются диаграммами одного и того же графа $K_{3,3}$.

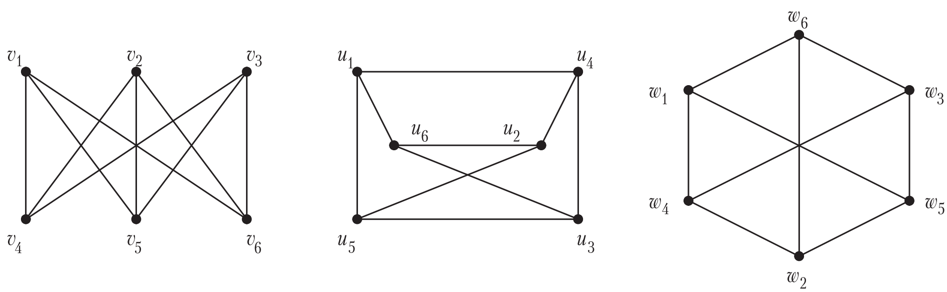

Рис. 7.5. Диаграммы изоморфных графов

Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется *инвариантом* графа. Так, $p(G)$ и $q(G)$ — инварианты графа G. Неизвестно никакого простого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

Пример. Количество вершин, рёбер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф даже в простейших случаях! На рис. 7.6 представлены диаграммы графов, у которых указанные инварианты совпадают, но графы при этом не изоморфны.

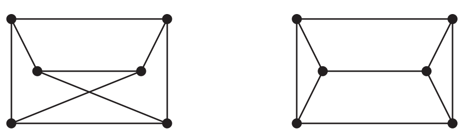

Рис. 7.6. Диаграммы неизоморфных графов с совпадающими инвариантами

7.2. Элементы графов

После рассмотрения определений, относящихся к графам как к цельным объектам, естественно дать определения различным элементам графов.

7.2.1. Подграфы

Граф $G'(V', E')$ называется *подграфом* (или *частью*) графа $G(V, E)$ (обозначается $G' \subset G$), если $V' \subset V$ & $E' \subset E$. Если $V' = V$, то G' называется *остовным подграфом* G. Если $V' \subset V$ & $E' \subset E$ & $(V' \neq V \vee E' \neq E)$, то граф G' называется *собственным* подграфом графа G. Подграф $G'(V', E')$ называется *правильным* подграфом графа $G(V, E)$, если G' содержит все возможные рёбра G:

$$\forall\, u, v \in V' \ \ ((u, v) \in E \Longrightarrow (u, v) \in E')\,.$$

Правильный подграф $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством вершин V'.

ЗАМЕЧАНИЕ

Иногда подграфами называют только правильные подграфы, а неправильные подграфы называют *изграфами*.

7.2.2. Валентность

Количество рёбер, инцидентных вершине v, называется *степенью* (или *валентностью*) вершины v и обозначается $d(v)$:

$$\forall\, v \in V \ \ (0 \leqslant d(v) \leqslant p - 1)\,, \qquad d(v) = |\Gamma^{+}(v)|.$$

Таким образом, степень $d(v)$ вершины v совпадает с количеством смежных с ней вершин. Количество вершин, не смежных с v, обозначают $\overline{d}(v)$. Ясно, что

$$\forall\, v \in V \ \ \big(d(v) + \overline{d}(v) = p - 1\big)\,.$$

Обозначим *минимальную* степень вершины графа G через $\delta(G)$, а *максимальную* — через $\Delta(G)$:

$$\delta\,(G(V, E)) \overset{\mathrm{Def}}{=} \min_{v \in V} d(v), \qquad \Delta\,(G(V, E)) \overset{\mathrm{Def}}{=} \max_{v \in V} d(v).$$

Ясно, что $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ являются инвариантами. Если степени всех вершин равны k, то граф называется *регулярным* степени k:

$$\delta(G) = \Delta(G) = k, \quad \forall\, v \in V \ \ (d(v) = k)\,.$$

Степень регулярности обозначается $r(G)$. Для нерегулярных графов $r(G)$ не определено.

Примеры

На рис. 7.7 приведена диаграмма регулярного графа степени 3. На рис. 7.6 приведены диаграммы двух регулярных, но неизоморфных графов степени 3.

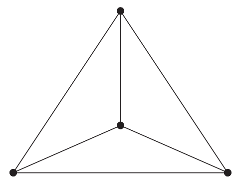

Рис. 7.7. Диаграмма регулярного графа степени 3

Если степень вершины равна нулю (то есть $d(v) = 0$), то вершина называется *изолированной*. Если степень вершины равна единице (то есть $d(v) = 1$), то вершина называется *концевой*, или *висячей*. Для орграфа число дуг, исходящих из узла v, называется *полустепенью исхода*, а число входящих — *полустепенью захода*. Обозначаются эти числа, соответственно, $d^-(v)$ и $d^+(v)$.

ТЕОРЕМА (Лемма о рукопожатиях). *Сумма степеней вершин графа (мультиграфа) равна удвоенному количеству рёбер:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q.$$

Доказательство. При подсчёте суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Число вершин нечётной степени чётно.*

Доказательство. По теореме сумма степеней всех вершин — чётное число. Сумма степеней вершин чётной степени чётна, значит, сумма степеней вершин нечётной степени также чётна, следовательно, их чётное число. □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству дуг:*

$$\sum_{v \in V} d^-(v) + \sum_{v \in V} d^+(v) = 2q.$$

Доказательство. Сумма полустепеней узлов орграфа равна сумме степеней вершин графа (мультиграфа), полученного из орграфа забыванием ориентации дуг. □

7.2.3. Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и кончающаяся вершиной, $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны, причём однородные элементы (вершины, рёбра) через один смежны или совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ

Это определение подходит также для псевдо-, мульти- и орграфов. При этом в графе (орграфе) достаточно указать только последовательность вершин (узлов) или только последовательность рёбер (дуг).

Если $v_0 = v_k$, то маршрут *замкнут*, иначе — *открыт*. Если все рёбра различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит, и рёбра) различны, то маршрут называется *простой* цепью. В цепи $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называются *концами* цепи. Говорят, что цепь с концами u и v *соединяет* вершины u и v. Цепь, соединяющая вершины u и v, обозначается $\langle u, v\rangle$. Если нужно указать граф G, которому принадлежит цепь, то добавляют индекс: $\langle u, v\rangle_G$. Нетрудно показать, что если есть какая-либо цепь, соединяющая вершины u и v, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины. Замкнутая цепь называется *циклом*; замкнутая простая цепь называется *простым циклом*. Число циклов в графе G обозначается $z(G)$. Граф без циклов называется *ациклическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для псевдографов обычно особо оговаривают, считаются ли петли циклами.

Для орграфов цепь называется *путем*, а цикл — *контуром*. Путь в орграфе из узла u в узел v обозначают $\langle \overrightarrow{u, v}\rangle$.

Пример. В графе, диаграмма которого приведена на рис. 7.8:

1) v_1, v_3, v_1, v_4 — маршрут, но не цепь;
2) v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4 — цепь, но не простая цепь;
3) v_1, v_4, v_3, v_2, v_5 — простая цепь;
4) v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1 — цикл, но не простой цикл;
5) v_1, v_3, v_4, v_1 — простой цикл.

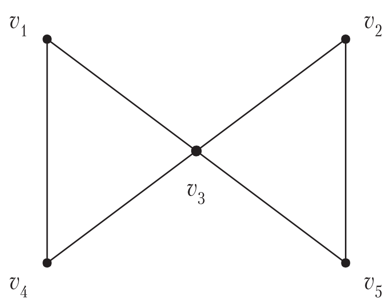

Рис. 7.8. Маршруты, цепи, циклы