

# Оглавление

Предисловие .....	13
Введение .....	15
<b>Глава 1. Множества и отношения .....</b>	<b>23</b>
1.1. Множества .....	23
1.1.1. Элементы и множества .....	23
1.1.2. Задание множеств .....	25
1.1.3. Парадокс Рассела .....	26
1.1.4. Мультимножества .....	27
1.1.5. Алфавит, слово и язык .....	28
1.2. Алгебра подмножеств .....	29
1.2.1. Сравнение множеств .....	29
1.2.2. Равномощные множества .....	30
1.2.3. Конечные и бесконечные множества .....	31
1.2.4. Добавление и удаление элементов .....	33
1.2.5. Мощность конечного множества .....	33
1.2.6. Операции над множествами .....	35
1.2.7. Разбиения и покрытия .....	36
1.2.8. Булеан .....	37
1.2.9. Свойства операций над множествами .....	37
1.3. Представление множеств в программах .....	38
1.3.1. Битовые шкалы .....	39
1.3.2. Генерация всех подмножеств универсума .....	40
1.3.3. Алгоритм построения бинарного кода Грея .....	41
1.3.4. Представление множеств упорядоченными списками .....	42
1.3.5. Проверка включения слиянием .....	43
1.3.6. Вычисление объединения слиянием .....	44
1.3.7. Вычисление пересечения слиянием .....	45
1.3.8. Представление множеств итераторами .....	46
1.4. Отношения .....	49
1.4.1. Упорядоченные пары и наборы .....	49
1.4.2. Прямое произведение множеств .....	50
1.4.3. Бинарные отношения .....	51
1.4.4. Композиция отношений .....	53
1.4.5. Степень отношения .....	54
1.4.6. Свойства отношений .....	54
1.4.7. Ядро отношения .....	56
1.4.8. Представление отношений в программах .....	57
1.5. Замыкание отношений .....	58
1.5.1. Транзитивное и рефлексивное замыкание .....	58
1.5.2. Алгоритм Уоршалла .....	59

1.6. Функции	60
1.6.1. Функциональные отношения	60
1.6.2. Инъекция, сюръекция и биекция	62
1.6.3. Образы и прообразы	63
1.6.4. Суперпозиция функций	64
1.6.5. Представление функций в программах	65
1.7. Отношения эквивалентности	65
1.7.1. Классы эквивалентности	66
1.7.2. Фактормножество	67
1.7.3. Ядро функционального отношения и множества уровня	67
1.8. Отношения порядка	69
1.8.1. Частичный и линейный порядок	69
1.8.2. Минимальные и наименьшие элементы	70
1.8.3. Алгоритм топологической сортировки	72
1.8.4. Верхние и нижние границы	73
1.8.5. Монотонные и непрерывные функции	73
1.8.6. Наименьшая неподвижная точка функции	75
1.8.7. Вполне упорядоченные множества	77
1.8.8. Индукция	78
Комментарии	79
Упражнения	79
<b>Глава 2. Алгебраические структуры</b>	<b>80</b>
2.1. Алгебры и морфизмы	80
2.1.1. Операции и их носитель	80
2.1.2. Замыкания и подалгебры	81
2.1.3. Система образующих	82
2.1.4. Свойства операций	83
2.1.5. Гомоморфизмы	84
2.1.6. Изоморфизмы	85
2.2. Алгебры с одной операцией	86
2.2.1. Полугруппы	86
2.2.2. Определяющие соотношения	87
2.2.3. Моноиды	89
2.2.4. Группы	90
2.2.5. Группа перестановок	92
2.3. Алгебры с двумя операциями	93
2.3.1. Кольца	93
2.3.2. Области целостности	94
2.3.3. Поля	95
2.4. Векторные пространства и модули	96
2.4.1. Векторное пространство	96
2.4.2. Линейные комбинации	98
2.4.3. Базис и размерность	99
2.4.4. Модули	100
2.5. Решётки	101
2.5.1. Определения	101
2.5.2. Ограниченные решётки	102
2.5.3. Решётка с дополнением	102
2.5.4. Частичный порядок в решётке	103
2.5.5. Полная решётка	104
2.5.6. Полуи решётки	104
2.5.7. Булевы алгебры	106
2.6. Матроиды и жадные алгоритмы	107
2.6.1. Матроиды	107

2.6.2. Максимальные независимые подмножества	108
2.6.3. Базисы	109
2.6.4. Жадный алгоритм	109
2.6.5. Примеры матроидов	112
Комментарии	113
Упражнения	113
<b>Глава 3. Булевы функции</b>	<b>115</b>
3.1. Элементарные булевы функции	115
3.1.1. Функции алгебры логики	115
3.1.2. Существенные и несущественные переменные	117
3.1.3. Булевы функции одной переменной	118
3.1.4. Булевы функции двух переменных	118
3.1.5. Функции $k$ -значной логики	119
3.2. Формулы	119
3.2.1. Реализация функций формулами	120
3.2.2. Равносильные формулы	123
3.2.3. Подстановка и замена	123
3.2.4. Алгебра булевых функций	125
3.3. Двойственность и симметрия	126
3.3.1. Двойственная функция	126
3.3.2. Реализация двойственной функции	127
3.3.3. Принцип двойственности	128
3.3.4. Симметрические функции	128
3.4. Нормальные формы	129
3.4.1. Разложение булевых функций по переменным	129
3.4.2. Минимальные термы	130
3.4.3. Совершенные нормальные формы	131
3.4.4. Эквивалентные преобразования	133
3.4.5. Минимальные дизъюнктивные формы	134
3.4.6. Геометрическая интерпретация	135
3.4.7. Сокращённые дизъюнктивные формы	137
3.5. Полнота	138
3.5.1. Замкнутые классы	138
3.5.2. Полные системы функций	140
3.5.3. Полнота двойственной системы	141
3.5.4. Теорема Поста	141
3.6. Представление булевых функций в программах	143
3.6.1. Табличные представления	143
3.6.2. Строковые представления	145
3.6.3. Алгоритм вычисления значения булевой функции	146
3.6.4. Карты Карно	147
3.6.5. Представление булевой функции на карте Карно	148
3.6.6. Деревья решений	150
Комментарии	152
Упражнения	152
<b>Глава 4. Логические исчисления</b>	<b>154</b>
4.1. Логические связи	155
4.1.1. Высказывания	155
4.1.2. Формулы	156
4.1.3. Интерпретация	156
4.1.4. Логическое следование и логическая эквивалентность	157
4.1.5. Подстановка и замена	159

4.2. Формальные теории	159
4.2.1. Определение формальной теории	159
4.2.2. Выводимость	160
4.2.3. Интерпретация	161
4.2.4. Общезначимость и непротиворечивость	161
4.2.5. Полнота, независимость и разрешимость	162
4.3. Исчисление высказываний	162
4.3.1. Классическое определение исчисления высказываний	162
4.3.2. Частный случай формулы	163
4.3.3. Алгоритмы унификации	164
4.3.4. Конструктивное определение исчисления высказываний	167
4.3.5. Производные правила вывода	167
4.3.6. Дедукция	168
4.3.7. Некоторые теоремы исчисления высказываний	170
4.3.8. Множество теорем исчисления высказываний	172
4.3.9. Другие аксиоматизации исчисления высказываний	173
4.4. Исчисление предикатов	174
4.4.1. Определения	174
4.4.2. Интерпретация	177
4.4.3. Общезначимость	178
4.4.4. Непротиворечивость и полнота чистого исчисления предикатов	178
4.4.5. Логическое следование и логическая эквивалентность	179
4.4.6. Теория равенства	180
4.4.7. Формальная арифметика	181
4.4.8. Неаксиоматизируемые теории	182
4.4.9. Теоремы Гёделя о неполноте	183
4.5. Автоматическое доказательство теорем	184
4.5.1. Постановка задачи	184
4.5.2. Доказательство от противного	185
4.5.3. Сведение к предложениям	186
4.5.4. Правило резолюции для исчисления высказываний	187
4.5.5. Правило резолюции для исчисления предикатов	188
4.5.6. Опровержение методом резолюций	188
4.5.7. Алгоритм метода резолюций	189
Комментарии	191
Упражнения	191
<b>Глава 5. Комбинаторика</b>	<b>192</b>
5.1. Комбинаторные задачи	193
5.1.1. Комбинаторные конфигурации	193
5.1.2. Размещения	193
5.1.3. Размещения без повторов	194
5.1.4. Перестановки	195
5.1.5. Сочетания	195
5.1.6. Сочетания с повторениями	196
5.2. Перестановки	197
5.2.1. Графическое представление перестановок	197
5.2.2. Инверсии	198
5.2.3. Генерация перестановок	199
5.2.4. Двойные факториалы	201
5.3. Биномиальные коэффициенты	201
5.3.1. Элементарные тождества	201
5.3.2. Бином Ньютона	202
5.3.3. Свойства биномиальных коэффициентов	203
5.3.4. Треугольник Паскаля	204

5.3.5. Генерация подмножеств	205
5.3.6. Мультимножества и последовательности	206
5.3.7. Мультиномиальные коэффициенты	207
5.4. Разбиения	208
5.4.1. Определения	208
5.4.2. Числа Стирлинга второго рода	209
5.4.3. Числа Стирлинга первого рода	210
5.4.4. Число Белла	210
5.5. Включения и исключения	210
5.5.1. Объединение конфигураций	211
5.5.2. Формула включений и исключений	211
5.5.3. Число булевых функций, существенно зависящих от всех своих переменных	213
5.6. Формулы обращения	213
5.6.1. Теорема обращения	213
5.6.2. Формулы обращения для биномиальных коэффициентов	214
5.6.3. Формулы для чисел Стирлинга	215
5.7. Производящие функции	216
5.7.1. Основная идея	216
5.7.2. Метод неопределённых коэффициентов	216
5.7.3. Числа Фибоначчи	217
5.7.4. Числа Каталана	218
Комментарии	220
Упражнения	220
<b>Глава 6. Кодирование</b>	<b>221</b>
6.1. Алфавитное кодирование	223
6.1.1. Таблица кодов	223
6.1.2. Разделимые схемы	223
6.1.3. Префиксные схемы	224
6.1.4. Неравенство Макмиллана	224
6.2. Кодирование с минимальной избыточностью	227
6.2.1. Минимизация длины кода сообщения	227
6.2.2. Цена кодирования	228
6.2.3. Алгоритм Фано	229
6.2.4. Оптимальное кодирование	230
6.2.5. Алгоритм Хаффмена	232
6.3. Помехоустойчивое кодирование	234
6.3.1. Кодирование с исправлением ошибок	234
6.3.2. Возможность исправления всех ошибок	236
6.3.3. Кодовое расстояние	237
6.3.4. Код Хэмминга для исправления одного замещения	238
6.4. Сжатие данных	240
6.4.1. Сжатие текстов	240
6.4.2. Предварительное построение словаря	241
6.4.3. Алгоритм Лемпела–Зива	242
6.5. Шифрование	244
6.5.1. Криптография	244
6.5.2. Шифрование с помощью случайных чисел	245
6.5.3. Криптостойкость	246
6.5.4. Модулярная арифметика	247
6.5.5. Шифрование с открытым ключом	248
6.5.6. Цифровая подпись	250
Комментарии	252
Упражнения	252

<b>Глава 7. Графы</b> .....	253
7.1. Определения графов .....	253
7.1.1. История теории графов .....	253
7.1.2. Основное определение .....	255
7.1.3. Смежность .....	256
7.1.4. Диаграммы .....	256
7.1.5. Орграфы, псевдографы, мультиграфы и гиперграфы .....	257
7.1.6. Изоморфизм графов .....	257
7.2. Элементы графов .....	259
7.2.1. Подграфы .....	259
7.2.2. Валентность .....	259
7.2.3. Маршруты, цепи, циклы .....	260
7.2.4. Связность .....	262
7.2.5. Расстояние между вершинами, ярусы и диаметр графа .....	262
7.2.6. Эксцентриситет и центр .....	262
7.3. Виды графов и операции над графами .....	263
7.3.1. Виды графов .....	263
7.3.2. Двудольные графы .....	264
7.3.3. Направленные орграфы и сети .....	265
7.3.4. Операции над графами .....	265
7.4. Представление графов в программах .....	268
7.4.1. Требования к представлению графов .....	268
7.4.2. Матрица смежности .....	268
7.4.3. Матрица инцидентий .....	269
7.4.4. Списки смежности .....	270
7.4.5. Массив дуг .....	270
7.4.6. Обходы графов .....	271
7.5. Орграфы и бинарные отношения .....	274
7.5.1. Графы и отношения .....	275
7.5.2. Достижимость и частичное упорядочение .....	275
7.5.3. Транзитивное замыкание .....	276
Комментарии .....	277
Упражнения .....	278
<b>Глава 8. Связность</b> .....	279
8.1. Компоненты связности .....	279
8.1.1. Объединение графов и компоненты связности .....	279
8.1.2. Точки сочленения, мосты и блоки .....	280
8.1.3. Вершинная и рёберная связность .....	284
8.1.4. Оценка числа рёбер .....	286
8.2. Теорема Менгера .....	287
8.2.1. Непересекающиеся цепи и разделяющие множества .....	287
8.2.2. Теорема Менгера в «вершинной форме» .....	288
8.2.3. Варианты теоремы Менгера .....	290
8.3. Теорема Холла .....	290
8.3.1. Задача о свадьбах .....	290
8.3.2. Трансверсаль .....	291
8.3.3. Совершенное паросочетание .....	291
8.3.4. Теорема Холла — формулировка и доказательство .....	291
8.4. Потоки в сетях .....	292
8.4.1. Определение потока .....	293
8.4.2. Разрезы .....	294
8.4.3. Теорема Форда — Фалкерсона .....	294
8.4.4. Алгоритм нахождения максимального потока .....	296
8.4.5. Связь между теоремой Менгера и теоремой Форда — Фалкерсона .....	298

8.5. Связность в орграфах	299
8.5.1. Сильная, односторонняя и слабая связность	299
8.5.2. Компоненты сильной связности	299
8.5.3. Выделение компонент сильной связности	300
8.6. Кратчайшие пути	301
8.6.1. Длина дуг	301
8.6.2. Алгоритм Флойда	302
8.6.3. Алгоритм Дейкстры	304
8.6.4. Дерево кратчайших путей	305
8.6.5. Кратчайшие пути в бесконтурном орграфе	307
Комментарии	308
Упражнения	308
<b>Глава 9. Деревья</b>	<b>310</b>
9.1. Свободные деревья	310
9.1.1. Определения	310
9.1.2. Основные свойства деревьев	311
9.1.3. Центр дерева	315
9.2. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья	315
9.2.1. Ориентированные деревья	315
9.2.2. Эквивалентное определение порядка	317
9.2.3. Упорядоченные деревья	318
9.2.4. Бинарные деревья	320
9.3. Представление деревьев в программах	321
9.3.1. Представление свободных деревьев	321
9.3.2. Представление упорядоченных ориентированных деревьев	323
9.3.3. Число упорядоченных ориентированных деревьев	325
9.3.4. Проверка правильности скобочной структуры	326
9.3.5. Представление бинарных деревьев	327
9.3.6. Обходы бинарных деревьев	330
9.3.7. Алгоритм симметричного обхода бинарного дерева	331
9.4. Деревья сортировки	331
9.4.1. Ассоциативная память	332
9.4.2. Способы реализации ассоциативной памяти	332
9.4.3. Алгоритм бинарного (двоичного) поиска	333
9.4.4. Алгоритм поиска в дереве сортировки	334
9.4.5. Алгоритм вставки в дерево сортировки	335
9.4.6. Алгоритм удаления из дерева сортировки	336
9.4.7. Вспомогательные алгоритмы для дерева сортировки	338
9.4.8. Сравнение представлений ассоциативной памяти	339
9.4.9. Выровненные и полные деревья	340
9.4.10. Сбалансированные деревья	341
9.4.11. Балансировка деревьев	343
9.5. Кратчайший остов	345
9.5.1. Определения	345
9.5.2. Схема алгоритма построения кратчайшего остова	346
9.5.3. Алгоритм Краскала	347
9.5.4. Алгоритм Прима	348
Комментарии	349
Упражнения	350
<b>Глава 10. Циклы, независимость и раскраска</b>	<b>351</b>
10.1. Фундаментальные циклы и разрезы	351
10.1.1. Циклы и разрезы	351

10.1.2. Фундаментальная система циклов и циклический ранг	353
10.1.3. Фундаментальная система разрезов и коциклический ранг	355
10.1.4. Подпространства циклов и коциклов	356
10.2. Эйлеровы циклы	358
10.2.1. Эйлеровы графы	358
10.2.2. Алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе	359
10.2.3. Оценка числа эйлеровых графов	360
10.3. Гамильтоновы циклы	361
10.3.1. Гамильтоновы графы	361
10.3.2. Задача коммивояжёра	362
10.4. Независимые и покрывающие множества	363
10.4.1. Покрывающие множества вершин и рёбер	363
10.4.2. Независимые множества вершин и рёбер	364
10.4.3. Связь чисел независимости и покрытий	365
10.5. Построение независимых множеств вершин	366
10.5.1. Постановка задачи отыскания наибольшего независимого множества вершин	366
10.5.2. Поиск с возвратами	367
10.5.3. Улучшенный перебор	368
10.5.4. Алгоритм построения максимальных независимых множеств вершин	370
10.6. Доминирующие множества	371
10.6.1. Минимальное и наименьшее доминирующее множество	371
10.6.2. Доминирование и независимость	371
10.6.3. Задача о наименьшем покрытии	372
10.6.4. Связь задачи о наименьшем покрытии с другими задачами	373
10.7. Раскраска графов	373
10.7.1. Оценки хроматического числа	374
10.7.2. Хроматические числа графа и его дополнения	375
10.7.3. Точный алгоритм раскрашивания	376
10.7.4. Приближённый алгоритм последовательного раскрашивания	377
10.7.5. Улучшенный алгоритм последовательного раскрашивания	378
10.8. Планарность	379
10.8.1. Укладка графов	379
10.8.2. Эйлерова характеристика	379
10.8.3. Теорема о пяти красках	381
Комментарии	382
Упражнения	382
Указатель основных обозначений	383
Список литературы	386
Предметный указатель	388