Глава 7 Графы

Эта глава открывает заключительную часть книги, целиком посвященную графам и алгоритмам на них. Среди дисциплин и методов дискретной математики теория графов и особенно алгоритмы на графах находят наиболее широкое применение в программировании. Как показано в разделе 7.5, между понятием графа и понятием бинарного отношения, рассмотренным в главе 1, имеется глубокая связь — можно сказать, что это равнообъёмные понятия. Возникает естественный вопрос, почему же тогда графам оказывается столь заметное предпочтение при изучении дискретной математики и программирования? Дело в том, что теория графов предоставляет очень удобный *язык* для описания программных (да и многих других) моделей. Этот тезис можно пояснить следующей аналогией. Понятие отношения также можно полностью выразить через понятие множества (см. замечание в подразделе 1.4.1 и далее). Однако независимое определение понятия отношения *удобнее* — введение специальных терминов и обозначений упрощает изложение теории и делает её более понятной. То же относится и к теории графов. Стройная система специальных терминов и обозначений теории графов позволяет просто и доступно описывать сложные и тонкие вещи. Особенно важна возможность наглядной графической интерпретации понятия графа (см. 7.1.4). Само название «граф» подразумевает наличие графической интерпретации. Картинки часто позволяют сразу «усмотреть» суть дела на интуитивном уровне, дополняя и украшая утомительные текстовые доказательства и сложные формулы. Эта глава практически полностью посвящена описанию языка теории графов.

7.1. Определения графов

Как это ни удивительно, но для понятия «граф» нет общепризнанного единого определения. Разные авторы, особенно применительно к разным приложениям, называют словом «граф» очень похожие, но все-таки различные объекты. Здесь используется терминология [28], которая была выбрана из соображений максимального упрощения определений и доказательств.

7.1.1. История теории графов

Теория графов многократно переоткрывалась разными авторами при решении различных прикладных задач.

1. *Задача о Кёнигсбергских мостах.* На рис. 7.1 представлен схематический план центральной части города Кёнигсберг (ныне Калининград), включающий два берега реки Перголя, два острова на ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том, чтобы обойти все четыре участка суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. В 1736 году Эйлером[1] было показано, что решения этой задачи не существует. Точнее говоря, Эйлер получил необходимое и достаточное условие существования решения для всех задач типа задачи о Кёнигсбергских мостах (см. 10.2.1).

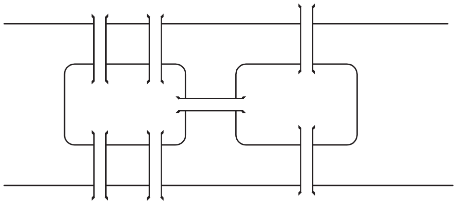

Рис. 7.1. Иллюстрация к задаче о Кёнигсбергских мостах

2. *Задача о трёх домах и трёх колодцах.* Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Требуется провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались (рис. 7.2). Эта задача также не имеет решения. В 1930 году Куратовским[1] было доказано намного более сильное утверждение, а именно достаточность условия существования решения для всех задач типа задачи о трёх домах и трёх колодцах (необходимость этого условия была известна и ранее, см. 10.8.2).

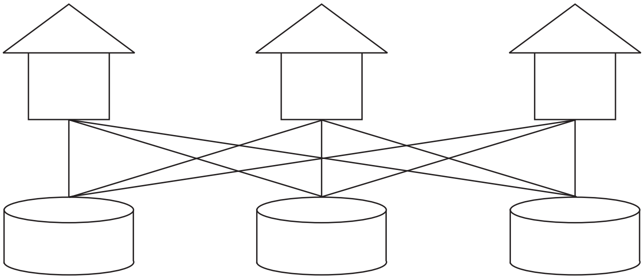

Рис. 7.2. Иллюстрация к задаче о трёх домах и трёх колодцах

3. *Задача о четырёх красках.* Разделение плоскости на неперекрывающиеся области называется *картой.* Области на карте называются соседними, если они имеют общую границу. Задача состоит в раскрашивании карты таким образом, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом (рис. 7.3). С конца XIX века известна гипотеза, что для этого достаточно четырёх красок. В 1976 году Аппель и Хейкен опубликовали решение задачи

[1] Леонард Эйлер (1707–1783).

[1] Казимир Куратовский (1896–1979).

о четырёх красках, которое базировалось на переборе вариантов с помощью компьютера.

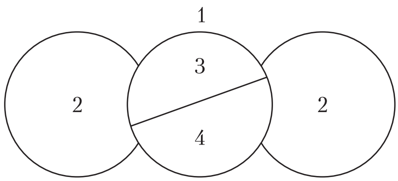

Рис. 7.3. Иллюстрация к задаче о четырёх красках

ОТСТУПЛЕНИЕ

Решение задачи о четырёх красках Аппелем и Хейкеном «программным путем» явилось прецедентом, породившим бурную дискуссию, которая отнюдь не закончена. Суть опубликованного решения состоит в том, чтобы перебрать большое, но конечное число (около 2000) типов потенциальных контрпримеров к теореме о четырёх красках и показать, что ни один случай контрпримером не является. Этот перебор был выполнен программой примерно за тысячу часов работы суперкомпьютера. Проверить «вручную» полученное решение невозможно — объём перебора выходит далеко за рамки человеческих возможностей. Многие математики ставят вопрос: можно ли считать такое «программное доказательство» действительным доказательством? Ведь в программе могут быть ошибки... Методы формального доказательства правильности программ не применимы к программам такой сложности, как обсуждаемая. Тестирование не может гарантировать отсутствие ошибок и в данном случае вообще невозможно. Таким образом, остаётся уповать на программистскую квалификацию авторов и верить, что они всё сделали правильно.

7.1.2. Основное определение

Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств — непустого множества V (множества *вершин*) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E — множество *рёбер*),

$$G(V, E) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle V; E \rangle , \quad V \neq \varnothing, \quad E \subset 2^V \ \& \ \forall\, e \in E \ \ (|e| = 2) .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Легко видеть, что любое множество E двухэлементных подмножеств множества V определяет симметричное бинарное отношение на множестве V. Поэтому можно считать, что

$$E \subset V \times V, \quad E = E^{-1}$$

и трактовать ребро не только как множество $\{v_1, v_2\}$, но и как пару (v_1, v_2).

Число вершин графа G обозначим p, а число рёбер — q:

$$p \stackrel{\text{Def}}{=} p(G) \stackrel{\text{Def}}{=} |V|, \quad q \stackrel{\text{Def}}{=} q(G) \stackrel{\text{Def}}{=} |E|.$$

Если хотят явно упомянуть числовые характеристики графа, то говорят, (p, q)-граф.

7.1.3. Смежность

Пусть v_1, v_2 — вершины, $e = (v_1, v_2)$ — соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e *инцидентны*, ребро e и вершина v_2 также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются *смежными*. Множество вершин, смежных с вершиной v, называется *множеством смежности* (или *окрестностью*) вершины v и обозначается $\Gamma^+(v)$:

$$\Gamma^+(v) \overset{\text{Def}}{=} \{u \in V \mid (u, v) \in E\}, \qquad \Gamma^*(v) \overset{\text{Def}}{=} \Gamma^+(v) + v.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Если не оговорено противное, то символ Γ без индекса подразумевает Γ^+, то есть саму вершину в окрестность не включают.

Очевидно, что $u \in \Gamma(v) \iff v \in \Gamma(u)$. Если $A \subset V$ — множество вершин, то $\Gamma(A)$ — множество всех вершин, смежных с вершинами из A:

$$\Gamma(A) \overset{\text{Def}}{=} \{u \in V \mid \exists v \in A \ \ (u \in \Gamma(v))\} = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v).$$

7.1.4. Диаграммы

Обычно граф изображают *диаграммой*: вершины — точками (или кружками), рёбра — линиями.

Пример На рис. 7.4 приведен пример диаграммы графа, имеющего четыре вершины и пять рёбер. В этом графе вершины v_1 и v_2, v_2 и v_3, v_3 и v_4, v_4 и v_1, v_2 и v_4 смежны, а вершины v_1 и v_3 не смежны. Смежные рёбра: e_1 и e_2, e_2 и e_3, e_3 и e_4, e_4 и e_1, e_1 и e_5, e_2 и e_5, e_3 и e_5, e_4 и e_5. Несмежные рёбра: e_1 и e_3, e_2 и e_4.

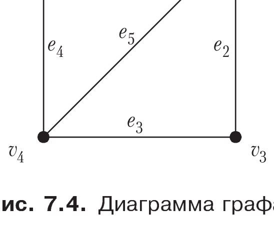

Рис. 7.4. Диаграмма графа

7.1.5. Орграфы, псевдографы, мультиграфы и гиперграфы

Часто рассматриваются следующие родственные графам объекты:

1. Если элементами множества E являются *упорядоченные* пары (т. е. $E \subset V \times V$), то граф называется *ориентированным* (или *орграфом*). В этом случае элементы множества V называются *узлами*, а элементы множества E — *дугами*.
2. Если элементом множества E может быть пара *одинаковых* (не различных) элементов V, то такой элемент множества E называется *петлей*, а граф называется *графом с петлями* (или *псевдографом*).
3. Если E является не множеством, а *мультимножеством*, содержащим некоторые элементы по несколько раз, то эти элементы называются *кратными рёбрами*, а граф называется *мультиграфом*.
4. Если элементами множества E являются не обязательно двухэлементные, а *любые* (непустые) подмножества множества V, то такие элементы множества E называются *гипердугами*, а граф называется *гиперграфом*.
5. Если задана функция $F\colon V \to M$ и/или $F\colon E \to M$, то множество M называется множеством *пометок*, а граф называется *помеченным* (или *нагруженным*). В качестве множества пометок обычно используются буквы или целые числа. Если функция F инъективна, то есть разные вершины (рёбра) имеют разные пометки, то граф называют *нумерованным*.

ЗАМЕЧАНИЕ

Отношение смежности является в некотором смысле определяющим для графов и подобных им объектов (см. разделы 7.4 и 7.5). При этом следует учитывать особенности каждого типа объектов. В орграфе вершина v смежна с вершиной u, если существует дуга (u, v). При этом вершина u может быть несмежна с вершиной v. Отношение смежности в графе симметрично, а в орграфе оно вовсе не обязано быть симметричным. В графе обычно считают отношение смежности рефлексивным, то есть полагают, что вершина смежна сама с собой. В псевдографе, напротив, вершину не считают смежной с собой, если у неё нет петли. В гиперграфе две вершины считаются смежными, если они принадлежат одному гиперребру. В гиперорграфе гипердуга обычно проводится из одного узла в множество узлов (возможно, пустое). В таком случае отношение смежности оказывается уже не бинарным отношением на V, а отношением из V в 2^V. Эти и подобные естественные вариации определений обычно считают ясными из контекста.

Далее выражение «граф $G(V, E)$» означает неориентированный непомеченный граф без петель и кратных рёбер с множеством вершин V и множеством рёбер E.

7.1.6. Изоморфизм графов

Говорят, что два графа, $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, *изоморфны* (обозначается $G_1 \sim G_2$, или $G_1 = G_2$), если существует биекция $h\colon V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность (см. 2.1.6):

$$e_1 = (u, v) \in E_1 \Longleftrightarrow e_2 = \big(h(u), h(v)\big) \in E_2.$$

ТЕОРЕМА *Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.*

Доказательство Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами:

[Рефлексивность] $G \sim G$, где требуемая биекция есть тождественная функция.

[Симметричность] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h, то $G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1}.

[Транзитивность] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g, то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \circ h$. □

Графы рассматриваются *с точностью до изоморфизма*, то есть рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма (см. 2.1.5).

Пример Три внешне различные диаграммы, приведённые на рис. 7.5, являются диаграммами одного и того же графа $K_{3,3}$.

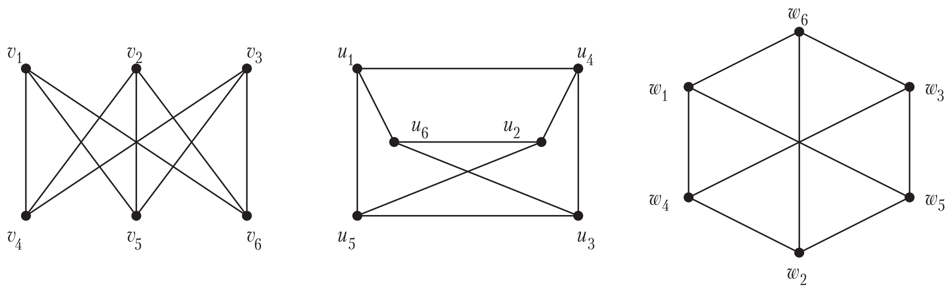

Рис. 7.5. Диаграммы изоморфных графов

Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется *инвариантом* графа. Так, $p(G)$ и $q(G)$ — инварианты графа G. Неизвестно никакого простого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

Пример Количество вершин, рёбер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф даже в простейших случаях! На рис. 7.6 представлены диаграммы графов, у которых указанные инварианты совпадают, но графы при этом не изоморфны.

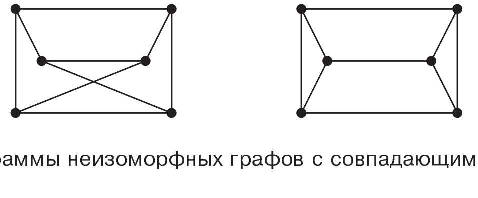

Рис. 7.6. Диаграммы неизоморфных графов с совпадающими инвариантами

7.2. Элементы графов

После рассмотрения определений, относящихся к графам как к цельным объектам, естественно дать определения различным элементам графов.

7.2.1. Подграфы

Граф $G'(V', E')$ называется *подграфом* (или *частью*) графа $G(V, E)$ (обозначается $G' \subset G$), если $V' \subset V$ & $E' \subset E$. Если $V' = V$, то G' называется *остовным подграфом* G. Если $V' \subset V$ & $E' \subset E$ & $(V' \neq V \vee E' \neq E)$, то граф G' называется *собственным* подграфом графа G. Подграф $G'(V', E')$ называется *правильным* подграфом графа $G(V, E)$, если G' содержит все возможные рёбра G:

$$\forall\, u, v \in V' \ \ ((u, v) \in E \Longrightarrow (u, v) \in E') \,.$$

Правильный подграф $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством вершин V'.

ЗАМЕЧАНИЕ

Иногда подграфами называют только правильные подграфы, а неправильные подграфы называют *изграфами*.

7.2.2. Валентность

Количество рёбер, инцидентных вершине v, называется *степенью* (или *валентностью*) вершины v и обозначается $d(v)$:

$$\forall\, v \in V \ \ (0 \leqslant d(v) \leqslant p - 1) \,, \qquad d(v) = |\Gamma^{+}(v)|.$$

Таким образом, степень $d(v)$ вершины v совпадает с количеством смежных с ней вершин. Количество вершин, не смежных с v, обозначают $\overline{d}(v)$. Ясно, что

$$\forall\, v \in V \ \ \big(d(v) + \overline{d}(v) = p - 1\big) \,.$$

Обозначим *минимальную* степень вершины графа G через $\delta(G)$, а *максимальную* — через $\Delta(G)$:

$$\delta\,(G(V, E)) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \min_{v \in V} d(v), \qquad \Delta\,(G(V, E)) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \max_{v \in V} d(v).$$

Ясно, что $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ являются инвариантами. Если степени всех вершин равны k, то граф называется *регулярным* степени k:

$$\delta(G) = \Delta(G) = k, \quad \forall\, v \in V \ \ (d(v) = k) \,.$$

Степень регулярности обозначается $r(G)$. Для нерегулярных графов $r(G)$ не определено.

Примеры

На рис. 7.7 приведена диаграмма регулярного графа степени 3. На рис. 7.6 приведены диаграммы двух регулярных, но неизоморфных графов степени 3.

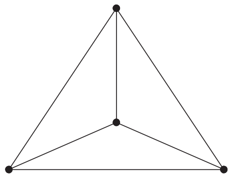

Рис. 7.7. Диаграмма регулярного графа степени 3

Если степень вершины равна нулю (то есть $d(v) = 0$), то вершина называется *изолированной*. Если степень вершины равна единице (то есть $d(v) = 1$), то вершина называется *концевой*, или *висячей*. Для орграфа число дуг, исходящих из узла v, называется *полустепенью исхода*, а число входящих — *полустепенью захода*. Обозначаются эти числа, соответственно, $d^-(v)$ и $d^+(v)$.

ТЕОРЕМА (Лемма о рукопожатиях) *Сумма степеней вершин графа (мультиграфа) равна удвоенному количеству рёбер:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q.$$

Доказательство При подсчёте суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого. □

СЛЕДСТВИЕ 1 *Число вершин нечётной степени чётно.*

Доказательство По теореме сумма степеней всех вершин — чётное число. Сумма степеней вершин чётной степени чётна, значит, сумма степеней вершин нечётной степени также чётна, следовательно, их чётное число. □

СЛЕДСТВИЕ 2 *Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству дуг:*

$$\sum_{v \in V} d^-(v) + \sum_{v \in V} d^+(v) = 2q.$$

Доказательство Сумма полустепеней узлов орграфа равна сумме степеней вершин графа (мультиграфа), полученного из орграфа забыванием ориентации дуг. □

7.2.3. Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и кончающаяся вершиной, $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны, причём однородные элементы (вершины, рёбра) через один смежны или совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ

Это определение подходит также для псевдо-, мульти- и орграфов. При этом в графе (орграфе) достаточно указать только последовательность вершин (узлов) или только последовательность рёбер (дуг).

Если $v_0 = v_k$, то маршрут *замкнут*, иначе — *открыт*. Если все рёбра различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит, и рёбра) различны, то маршрут называется *простой* цепью. В цепи $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называются *концами* цепи. Говорят, что цепь с концами u и v *соединяет* вершины u и v. Цепь, соединяющая вершины u и v, обозначается $\langle u, v\rangle$. Если нужно указать граф G, которому принадлежит цепь, то добавляют индекс: $\langle u, v\rangle_G$. Нетрудно показать, что если есть какая-либо цепь, соединяющая вершины u и v, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины. Замкнутая цепь называется *циклом*; замкнутая простая цепь называется *простым циклом*. Число циклов в графе G обозначается $z(G)$. Граф без циклов называется *ациклическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для псевдографов обычно особо оговаривают, считаются ли петли циклами.

Для орграфов цепь называется *путем*, а цикл — *контуром*. Путь в орграфе из узла u в узел v обозначают $\langle \overrightarrow{u, v}\rangle$.

Пример В графе, диаграмма которого приведена на рис. 7.8:

1) v_1, v_3, v_1, v_4 — маршрут, но не цепь;
2) v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4 — цепь, но не простая цепь;
3) v_1, v_4, v_3, v_2, v_5 — простая цепь;
4) v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1 — цикл, но непростой цикл;
5) v_1, v_3, v_4, v_1 — простой цикл.

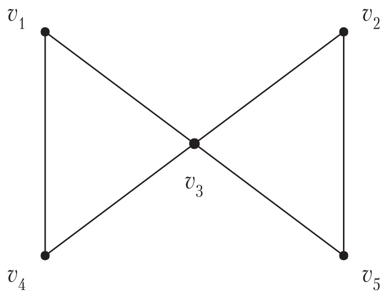

Рис. 7.8. Маршруты, цепи, циклы