Глава 15. Изысканный танец

Осенью 1990 года я стал аспирантом в Гарварде. Это было необходимо для того, чтобы сменить должность приглашенного профессора на нечто более постоянное. Иосиф Бернштейн согласился стать моим официальным научным руководителем. К тому времени я наработал достаточно материала для кандидатской диссертации, и Артур Джаффе уговорил декана факультета в качестве исключения позволить мне сократить срок обучения в аспирантуре (которое обычно занимает 4 или 5 лет, и в любом случае не менее 2 лет, согласно правилам) до одного года, для того чтобы я мог защититься уже через год. Благодаря этому мое «понижение в должности» с профессора до аспиранта продлилось совсем немного.

Моя кандидатская диссертация была посвящена новому проекту, который я только что завершил. Все началось с обсуждения с Дринфельдом программы Ленглендса весной того года. Вот пример одной из наших бесед, оформленный в виде сценария.

ДЕЙСТВИЕ 1

СЦЕНА 1

КАБИНЕТ ДРИНФЕЛЬДА В ГАРВАРДЕ

Дринфельд меряет шагами комнату вдоль стены, на которой висит классная доска.

Эдуард, сидя в кресле, делает заметки (на столе рядом с ним стоит чашка чая).

Дринфельд

Итак, гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля открывает связь между кубическими уравнениями и модулярными формами, однако Ленглендс пошел еще дальше. Он предсказал существование более общего соответствия, в котором роль модулярных форм играют автоморфные представления группы Ли.

Эдуард

Что такое автоморфное представление?

Дринфельд (*после долгой паузы*)

Точное определение нам сейчас неважно. В любом случае, ты можешь найти его в учебнике. Важно для нас то, что это представление группы Ли G, например группы $SO(3)$ вращений сферы.

Эдуард

Хорошо. А с чем эти автоморфные представления связаны?

Дринфельд

Вот это самое интересное. Ленглендс предсказал, что они должны быть связаны с представлениями группы Галуа в другой группе Ли.[1]

Эдуард

Понятно. Вы имеете в виду, что эта группа Ли — это не та же самая группа G?

Дринфельд

Нет! Это другая группа Ли, которая называется двойственной группой Ленглендса для G.

Дринфельд пишет на доске символ ${}^LG$.

Эдуард

Буква L в честь Ленглендса?

Дринфельд (с легкой улыбкой)

Первоначально Ленглендсом двигало стремление понять объекты, называемые L-функциями, потому он и назвал эту группу L-группой…

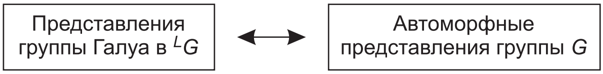
Эдуард

То есть для каждой группы Ли G существует другая группа Ли, которая называется ${}^LG$, правильно?

Дринфельд

Да. И она присутствует в соответствии Ленглендса, которое схематически выглядит так.

Дринфельд рисует на доске схему[2]



Эдуард

Я не понимаю… по крайней мере пока что. Но позвольте задать вопрос попроще: как будет выглядеть, например, двойственная группа Ленглендса для SO(3)?

Дринфельд

Это довольно просто — двойное накрытие *SO*(3). Ты видел фокус с чашкой?

Эдуард

Фокус с чашкой? Ах, да, припоминаю…

СЦЕНА 2

ДОМАШНЯЯ ВЕЧЕРИНКА АСПИРАНТОВ ГАРВАРДА

Десяток или около того студентов, всем немного за двадцать, разговаривают, пьют пиво и вино. Эдуард беседует с аспиранткой.

Аспирантка

Вот как это делается.

Аспирантка берет пластиковый стаканчик с вином и ставит его на открытую ладонь правой руки. Затем она начинает вращать ладонью, поворачивая руку как на последовательности фотографий на с. 213. Она совершает один полный оборот (360 градусов), и ее рука выворачивается локтем вверх. Все так же удерживая стаканчик вертикально, она продолжает вращение, и после еще одного полного оборота — сюрприз! — ее рука и чашка возвращаются в исходное нормальное положение.[3]

Другой аспирант

Я слышал, что на Филиппинах есть традиционный танец с вином, в котором они проделывают этот трюк обеими руками.[4]

Он берет два стакана пива и пытается повернуть обе ладони одновременно. Но уследить за руками не получается, и он тут же проливает пиво из обоих. Все смеются.

СЦЕНА 3

СНОВА КАБИНЕТ ДРИНФЕЛЬДА

Дринфельд

Этот фокус иллюстрирует тот факт, что на группе SO(3) существует нетривиальный замкнутый путь, двойное прохождение которого, однако, дает нам тривиальный путь.[5]

Эдуард

О, понимаю. Первое полное вращение чашки поворачивает руку под необычным углом — это и есть аналог нетривиального пути на SO(3).

Он берет со стола чашку чая и проделывает первую часть фокуса.

Эдуард

Казалось бы, второй поворот должен заставить вас еще больше вывернуть руку, но вместо этого рука возвращается в обычное положение.

Эдуард завершает движение.

Дринфельд

Точно.[6]

Эдуард

Но что общего между этим и двойственной группой Ленглендса?

Дринфельд

Двойственная группа Ленглендса для SO(3) — это двойное накрытие SO(3), так что…

Рис. 15.1. *Фокус с чашкой (последовательность фотографий — слева направо, сверху вниз). Фотографии Андреа Янг (Andrea Young)*

Эдуард

Так что каждому элементу группы SO(3) соответствуют два элемента из двойственной группы Ленглендса.

Дринфельд

Вот почему в этой новой группе[7] уже нет нетривиальных замкнутых путей.

Эдуард

То есть переход к двойственной группе Ленглендса — это способ избавиться от того вывиха?

Дринфельд

Правильно.[8] На первый взгляд кажется, что различие минимально, но в действительности последствия более чем значительны. Это например, объясняет разницу в поведении строительных кирпичиков материи, таких как электроны и кварки, и частиц, переносящих взаимодействия между ними, таких как фотоны. Для групп Ли более общего вида различие между самой группой и ее двойственной группой Ленглендса еще сильнее. По сути дела, во многих случаях между двумя двойственными группами даже не существует видимой связи.

Эдуард

Почему двойственная группа вообще появилась в соответствии Ленглендса? Волшебство какое-то…

Дринфельд

Это неизвестно.

Двойственность Ленглендса устанавливает парное взаимоотношение между группами Ли: для каждой группы Ли G существует двойственная группа Ли Ленглендса ${}^LG$, а двойственной к ${}^LG$ является сама G.[9] То, что программа Ленглендса связывает объекты двух разных типов (один из теории чисел, а второй из гармонического анализа), удивительно само по себе, но то, что две двойственные группы, G и ${}^LG$, присутствуют в разных частях этого соответствия (см. схему на с. 211) — это просто уму непостижимо!

Мы говорили о том, что программа Ленглендса соединяет разные континенты в мире математики. Продолжим аналогию: пусть это будут Европа и Северная Америка и пусть существует способ сопоставить каждому человеку в Европе человека из Северной Америки, и наоборот. Более того, предположим, что это соответствие подразумевает идеальное совпадение различных атрибутов,