

Глава семнадцатая

Электрические цепи с распределенными параметрами при установившемся режиме

17.1. Электрические цепи с распределенными параметрами

В § 3.3 было указано, что, строго говоря, мы всегда имеем цепи, параметры которых в той или иной мере распределены вдоль участков цепи, и только абстрагируясь от действительности, можно предполагать, что параметры цепи — индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость — сосредоточены в определенных участках цепи. Во многих случаях такое допущение не приводит к сколько-нибудь заметным неточностям в результатах проводимого анализа. Изложенная во всех предыдущих главах теория цепей относилась к цепям с сосредоточенными параметрами. Однако мы встречаемся с рядом важных случаев, когда такого рода допущение становится неприемлемым и совершенно необходимо учитывать распределенность параметров вдоль цепи. При этом еще имеем возможность рассматривать электротехническое устройство как электрическую цепь, если оно имеет большую протяженность лишь в одном определенном направлении. В таком случае можно говорить о параметрах, распределенных по длине цепи в этом направлении. Критерием необходимости рассматривать цепь в качестве цепи с распределенными параметрами, как было сказано в § 3.4, является соотношение между интервалом времени распространения электромагнитных волн вдоль всей длины цепи и интервалом времени, в течение которого токи и напряжения изменяются на величину, составляющую заметную долю от полного их изменения в рассматриваемом процессе. Когда эти интервалы времени сравнимы, то цепь необходимо рассматривать как цепь с распределенными параметрами.

Естественно, что токи и напряжения в таких цепях являются функциями двух независимых переменных — времени t и координаты x , отсчитываемой вдоль указанного выше направления. Соответственно, уравнения, описывающие процессы в этих цепях, являются уравнениями в частных производных. Примерами цепей с распределенными параметрами являются линии передачи электрической энергии, линии связи, высокочастотные коаксиальные линии радиотехнических и телевизионных устройств. Обмотки трансформаторов и электрических машин также должны рассматриваться как цепи с распределенными параметрами при воздействии на них импульсных токов и напряжений, когда промежуток времени изменения токов и напряжений сравним со временем пробега волн вдоль проволоки обмотки.

Параметры цепи могут быть распределены неравномерно вдоль цепи. Однако во многих случаях можно полагать параметры распределенными равномерно вдоль цепи, например для линий передач, в которых сечение проводов, их взаимное расположение и характеристики среды не изменяются по длине линии. Такие линии называют **о д н о р о д н ы м и**.

В дальнейшем под величинами, обозначаемыми через L , C , r , g и M , будем понимать индуктивность, емкость, сопротивление, проводимость и взаимную индуктивность, приходящиеся на единицу длины линии. Эти параметры, вообще

говоря, зависят от частоты. Например, сопротивление r и индуктивность L зависят от частоты вследствие поверхностного эффекта. Исследуя основные процессы в однородных линиях, будем полагать их параметры постоянными. В случае необходимости зависимость параметров от частоты должна быть учтена.

17.2. Уравнения линии с распределенными параметрами

Рассмотрим двухпроводную однородную линию. Величины L и r представляют собой индуктивность и сопротивление пары проводов на единицу длины линии, величины C и g — емкость и проводимость утечки между проводами на единицу длины линии. Координату x будем отсчитывать от некоторой точки линии, в частности от начала линии. Ток в проводах линии зависит не только от t , но и от x , так как на каждом отрезке dx линии ток ответвляется от одного провода к другому в виде тока смещения $Cdx \frac{\partial u}{\partial t}$ и тока проводимости $gdxu$. Поэтому если ток

в проводе в точке x равен i , то в точке $x + dx$ он отличается от i на величину $\frac{\partial i}{\partial x} dx$

и равен $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. Согласно принципу непрерывности тока, ток сквозь замкнутую поверхность s (рис. 17.1, а) равен нулю:

$$(-i) + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + \left(gdxu + Cdx \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}.$$

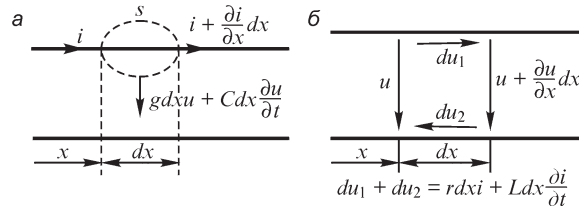


Рис. 17.1

Точно так же напряжение между проводами зависит не только от t , но и от x , так как на каждом отрезке dx линии имеет место падение напряжения в двух проводах линии $du_1 + du_2$ (рис. 17.1, б). Это падение напряжения складывается из падения напряжения $rdxi$ в сопротивлении rdx пары проводов и индуктивного падения напряжения $Ldx \frac{\partial i}{\partial t}$, обусловленного индуктивностью Ldx пары проводов, т. е. $du_1 + du_2 = rdx i + Ldx \frac{\partial i}{\partial t}$. Сумма падений напряжения в рассматриваемом контуре равна нулю:

$$(-u) + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \left(r dx i + L dx \frac{\partial i}{\partial t} \right) = 0$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Таким образом, уравнения линии имеют вид

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Для однородной линии параметры r , L , g и C не зависят от x . Для неоднородной линии они являются функциями от x .

В общем случае для n -проводной линии, расположенной в воздухе над поверхностью земли, для каждого из проводов необходимо в первом уравнении учитывать также ЭДС взаимной индукции от токов, протекающих в соседних проводах, а во втором уравнении учитывать также ток смещения между рассматриваемым проводом и всеми соседними проводами. При этом получаем систему из $2n$ уравнений (так называемых телеграфных уравнений):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_k}{\partial x} &= r_k i_k + L_k \frac{\partial i_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^n M_{km} \frac{\partial i_m}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i_k}{\partial x} &= g_k u_k + \sum_{m=1}^n g_{km} (u_k - u_m) + C_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^n C_{km} \frac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t}, \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots, n$ — номер провода; r_k , L_k , g_k , C_k — собственные параметры k -го провода на единицу длины с учетом влияния земли; M_{km} и C_{km} — взаимная индуктивность и емкость между k -м и m -м проводами на единицу длины линии с учетом влияния земли.

Рассмотрение частного случая — двухпроводной линии, которое будет выполнено в последующих параграфах, представляет интерес не только потому, что это наиболее простой случай, позволяющий наиболее наглядно показать основные особенности процессов в цепях с распределенными параметрами, но также и потому, что во многих случаях трехфазная линия может быть заменена эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Это можно сделать при синусоидальном процессе, если все провода находятся в одинаковых условиях, т. е. если осуществлена так называемая транспозиция проводов — последовательная перестановка их местами, и если полный цикл транспозиции значительно меньше длины волны тока и напряжения в линии (см. § 17.5). При этом для симметричных трехфазных напряжений прямой и обратной последовательности токи в проводах также образуют симметричные системы соответственно прямой и обратной последовательности. В этом случае достаточно рассматривать процесс в одной фазе, заменяя трехфазную линию эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Для напряжений и токов нулевой последовательности трехпроводную трехфазную линию также можно заменить эквивалентной двухпроводной, причем обратным проводом в этом случае является провод, эквивалентный земле при трехфазной линии.

17.3. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

При установившихся режимах токи и напряжения изменяются во времени по периодическому закону. Представив периодические функции времени в виде ряда Фурье, можно произвести расчет отдельно для каждой синусоидальной составляющей этого ряда и вследствие линейности цепи получить результирующий процесс, пользуясь методом наложения. Поэтому достаточно произвести анализ процессов в линии при синусоидальных токах и напряжениях.

Пусть ток и напряжение в линии изменяются во времени по синусоидальному закону с угловой частотой ω . Пользуясь комплексным методом, напомним уравнения линии для комплексных действующих напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I}; \quad -\frac{d\dot{I}}{dx} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U}.$$

Комплексные $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются функциями только x , и, соответственно, уравнения в частных производных для мгновенных u и i перешли в обыкновенные дифференциальные уравнения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$.

Дифференцируя первое уравнение по x и используя второе, находим

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U} = \gamma^2\dot{U},$$

где

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta.$$

Решение уравнения для $\dot{U}$ имеет вид

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}.$$

Из первого уравнения линии находим комплексный ток:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \end{aligned}$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}.$$

Комплексные величины $\gamma = \alpha + j\beta$ и Z являются основными характеристиками однородной линии и носят наименования: γ — коэффициент распространения линии, Z — волновое, или характеристическое, сопротивление линии, α — коэффициент затухания, β — коэффициент фазы.

Смысл всех этих наименований будет ясен из рассмотрения бегущих волн в линии (см. § 17.5). Обратим внимание на то, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Действительно,

обозначив $r + j\omega L = z'e^{j\psi'}$, $g + j\omega C = y'e^{j\psi''}$ и $\frac{1}{2}(\psi' + \psi'') = \theta$, будем иметь $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{z'y'}e^{j\theta} = \sqrt{z'y'}\cos\theta + j\sqrt{z'y'}\sin\theta$. Так как $0 < \psi' < \pi/2$, $0 < \psi'' < \pi/2$ и, следовательно, $0 < \theta < \pi/2$, то $\cos\theta > 0$ и $\sin\theta > 0$, т. е. $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Условимся отмечать дальше ток и напряжение в начале линии ($x = 0$) индексом 1 ($\dot{I}_1, \dot{U}_1$) и в конце линии ($x = l$, где l — длина линии) — индексом 2 ($\dot{I}_2, \dot{U}_2$).

Для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 достаточно знать две из этих четырех величин.

Выразим эти постоянные через напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ в начале линии. Полагая $x = 0$, имеем

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_1 + A_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = \frac{1}{Z}(A_1 - A_2); \\ A_1 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}; \\ \dot{I} &= \frac{1}{Z}\left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}\right].\end{aligned}$$

Эти же выражения для напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ в любой точке линии можно записать также в другой форме, используя соотношения

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \text{ch } \gamma x \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \text{sh } \gamma x.$$

Получаем

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \text{ch } \gamma x - \dot{I}_1 Z \text{sh } \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \text{ch } \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} \text{sh } \gamma x.$$

Значения напряжения $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$ в конце линии получаются, если принять $x = l$:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \text{ch } \gamma l - \dot{I}_1 Z \text{sh } \gamma l; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \text{ch } \gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z} \text{sh } \gamma l.$$

Из этих уравнений можно выразить $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ через $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Имеем

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch } \gamma l + \dot{I}_2 Z \text{sh } \gamma l; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\text{sh } \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \text{ch } \gamma l.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения четырехполюсника в A -параметрах. Постоянные этого четырехполюсника, соответственно, равны

$$A = D = \text{ch } \gamma l; \quad B = Z \text{sh } \gamma l; \quad C = \frac{\text{sh } \gamma l}{Z},$$

причем, как и для всякого пассивного четырехполюсника,

$$AD - BC = \text{ch}^2 \gamma l - \text{sh}^2 \gamma l = 1.$$

Как и всякий четырехполюсник, линия может быть заменена Т- или П-образной, в данном случае симметричной, эквивалентной схемой. Параметры эквивалентных схем вычисляются через постоянные A , B , C и D по формулам, приведенным в § 13.2.

17.4. О моделировании однородной линии цепной схемой

Рассмотрение линии с распределенными параметрами как четырехполюсника и, соответственно, замена линии эквивалентной Т- или П-образной схемой возможны только в том случае, если интересуемся напряжениями и токами только в начале и в конце линии. Если же желаем изучать распределение напряжения и тока вдоль линии, то необходимо ее рассматривать как цепь с распределенными параметрами и пользоваться приведенными ранее уравнениями, в которых $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются функциями x . Однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев. Поэтому приближенно можно линию конечной длины заменить цепной схемой с конечным числом звеньев, обладающих конечными значениями параметров. Такая замена будет давать тем более точные результаты, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Эти соображения имеют весьма большое значение для моделирования линий. Для экспериментального изучения в лабораторных условиях процессов в длинных линиях, а также процессов в различных системах, соединенных длинными линиями, обычно линии заменяют эквивалентными им цепными схемами. Точность моделирования будет тем больше, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Одного звена, заменяющего линию, достаточно, если интересуемся соотношениями между напряжениями и токами только в начале и в конце линии и только при одной частоте установившегося синусоидального режима. Если же желаем знать связь между напряжениями и токами хотя бы только в начале и в конце линии, но при разных частотах, например для разных гармоник несинусоидальных токов и напряжений, то моделировать всю линию одним Т- или П-образным звеном уже недостаточно. Это следует из того, что параметры такого звена, как видно из приведенных ранее формул, сложным образом зависят от характеристик линии Z и γ , которые в общем случае, в свою очередь, сложным образом зависят от частоты.

Моделировать линию цепной схемой с достаточным числом звеньев и по-прежнему необходимо при изучении распределения напряжения и тока вдоль линии.

Выбор числа звеньев в модели линии зависит от тех задач, которые ставятся при исследовании. Большей частью бывает достаточно взять 10–20 звеньев.

17.5. Бегущие волны

Рассмотрим выражение, полученное в § 17.3 для $\dot{U}$, причем введем обозначения

$$\dot{U}_\varphi = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} = \dot{U}_\varphi e^{-\gamma x} = U_\varphi e^{j\varphi} e^{-\gamma x};$$

$$\dot{U}_\psi = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} = \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = U_{\psi 1} e^{jn} e^{\gamma x}.$$

Тогда при $\gamma = \alpha + j\beta$ имеем

$$\dot{U} = \dot{U}_\phi + \dot{U}_\psi = \dot{U}_{\phi 1} e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = U_{\phi 1} e^{-\alpha x} e^{j(\xi - \beta x)} + U_{\psi 1} e^{\alpha x} e^{j(\eta + \beta x)}$$

и, переходя от комплексного напряжения $\dot{U}$ к изображаемому им напряжению u , получим

$$u = u_\phi + u_\psi = \sqrt{2} U_{\phi 1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x) + \sqrt{2} U_{\psi 1} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x).$$

Таким образом, u можно рассматривать как сумму двух составляющих u_ϕ и u_ψ . Из выражения $u_\phi = \sqrt{2} U_{\phi 1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x)$ следует, что при $x = \text{const}$, т. е. в данной точке линии, напряжение u_ϕ является синусоидальной функцией времени. Пусть $\alpha = 0$ и $e^{-\alpha x} = 1$. Тогда, приняв $t = \text{const}$, нетрудно убедиться, что при $\alpha = 0$ напряжение u_ϕ в данный момент времени будет распределено вдоль линии также по синусоидальному закону. При этом длина λ синусоидальной волны, изображающей этот закон распределения напряжения u_ϕ , т. е. расстояние между ближайшими точками, в которых фазы напряжения u_ϕ различаются на 2π , равна $2\pi/\beta$. Это синусоидальное распределение напряжения, или, как говорят, волна напряжения, перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью, равной $v = \omega/\beta$. Действительно, $\sin(\omega t + \xi - \beta x)$ при $x = x_0 + \omega t/\beta$ будет величиной постоянной, и, следовательно, напряжение, существовавшее в некоторый момент времени в произвольно выбранной точке x , будет оставаться неизменным, если эта точка начнет перемещаться вдоль линии со скоростью $v = \omega/\beta$. Так как при этой скорости остается неизменной фаза колебания, то ее называют фазовой скоростью волны. Такого рода волны, перемещающиеся вдоль некоторого направления, называют бегущими волнами. При $\alpha > 0$ наличие множителя $e^{-\alpha x}$ показывает, что амплитуда волны по мере продвижения последней вдоль линии затухает по показательному закону и что распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени может быть изображено синусоидой, затухающей по тому же закону (рис. 17.2). Поэтому коэффициент α называют коэффициентом затухания. Так как фаза напряжения изменяется с изменением x , то коэффициент β , характеризующий это изменение фазы, называют коэффициентом фазы.

При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что вторая составляющая $u_\psi = \sqrt{2} U_{\psi 1} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x)$ представляет собой волну такой же длины $\lambda = 2\pi/\beta$, как и u_ϕ , бегущую вдоль линии со скоростью $v = -\omega/\beta$, т. е. от конца линии к ее началу. Амплитуда этой волны, как показывает наличие множителя $e^{\alpha x}$, возрастает по показательному закону от начала линии к ее концу, или, иными словами, затухает по показательному закону по мере продвижения волны от конца линии к ее началу. Волны, бегущие

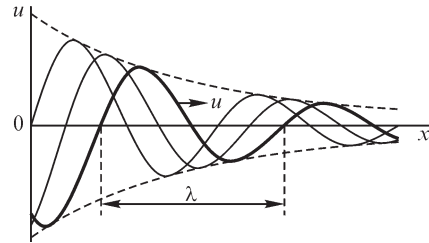


Рис. 17.2

от начала линии к ее концу, будем называть *прямыми волнами*, а волны, бегущие в обратном направлении, — *обратными волнами*.

Аналогично, рассматривая выражение для тока $\dot{I}$, можем написать $\dot{I} = \dot{I}_\phi + \dot{I}_\psi$, где $\dot{I}_\phi = \frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x}$; $\dot{I}_\psi = -\frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}$. Соответственно, для мгновенных значений получаем $i = i_\phi + i_\psi$, причем i_ϕ — прямая волна тока, а i_ψ — обратная волна тока.

Легко видеть, что отношение напряжения $\dot{U}_\phi$ прямой волны к току $\dot{I}_\phi$ прямой волны равно волновому сопротивлению линии Z , а для обратных волн соответствующее отношение равно $(-Z)$:

$$\frac{\dot{U}_\phi}{\dot{I}_\phi} = Z; \quad \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{I}_\psi} = -Z. \quad (*)$$

Появление обратных волн можно рассматривать как результат отражения прямых волн от конца линии. Соответственно, прямые волны называют также *падающими*, а обратные — *отраженными*. Коэффициентом отражения напряжения q_u от конца линии называют отношение отраженной волны $\dot{U}_{\psi_2}$ к прямой волне $\dot{U}_{\phi_2}$ напряжения в конце линии. Соответственно коэффициентом отражения тока q_i называют отношение $\dot{I}_{\psi_2}$ к $\dot{I}_{\phi_2}$. Найдем выражение для q_u и q_i через волновое сопротивление Z линии и сопротивление $Z_{\text{пр}}$ приемника, на которое замкнута линия на ее конце.

Имеем на конце линии

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{\phi_2} + \dot{U}_{\psi_2}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{\phi_2} + \dot{I}_{\psi_2} = \frac{\dot{U}_{\phi_2}}{Z} - \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{Z}.$$

Отсюда находим

$$2\dot{U}_{\psi_2} = \dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2 (Z_{\text{пр}} - Z); \quad 2\dot{U}_{\phi_2} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2 (Z_{\text{пр}} + Z);$$

следовательно,

$$q_u = \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{\dot{U}_{\phi_2}} = \frac{Z_{\text{пр}} - Z}{Z_{\text{пр}} + Z}.$$

Разделив первое равенство (*) на второе, получаем $q_i/q_u = -1$, т. е.

$$q_i = -q_u = \frac{Z - Z_{\text{пр}}}{Z + Z_{\text{пр}}}.$$

Если линия замкнута на конце на сопротивление, равное волновому, $Z_{\text{пр}} = Z$, то $q_u = 0$ и $q_i = 0$, т. е. в линии будут отсутствовать отраженные (обратные) волны. При этом в *любой точке линии* отношение напряжения к току равно волновому сопротивлению:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_\phi}{\dot{I}_\phi} = Z.$$

Если линия на конце разомкнута, т. е. имеем так называемый режим холостого хода, то $Z_{\text{пр}} = \infty$, $q_u = 1$ и $q_i = -1$. Следовательно, на конце линии падающая $\dot{U}_{\varphi_2}$ и отраженная $\dot{U}_{\psi_2}$ волны напряжения равны по значению и одинаковы по знаку, в результате чего результирующее напряжение $\dot{U}_2$ на конце линии оказывается в два раза больше напряжения падающей волны. Падающая $\dot{I}_{\varphi_2}$ и отраженная $\dot{I}_{\psi_2}$ волны тока равны по значению и противоположны по знаку, и результирующий ток $\dot{I}_2$ на конце разомкнутой линии равен нулю.

В другом крайнем случае короткого замыкания на конце линии $Z_{\text{пр}} = 0$, $q_u = -1$ и $q_i = 1$. При этом $\dot{U}_{\psi_2} = -\dot{U}_{\varphi_2}$ и $\dot{U}_2 = 0$, а $\dot{I}_{\psi_2} = \dot{I}_{\varphi_2}$ и $\dot{I}_2 = 2\dot{I}_{\varphi_2}$.

17.6. Характеристики однородной линии. Условия для неискажающей линии

Волновое сопротивление линии $Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}$ и коэффициент распространения

$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$ зависят от частоты. Поэтому условия прохождения волн тока и напряжения для разных частот оказываются различными. Если сигнал на входе линии является периодической несинусоидальной функцией времени, то на выходе линии форма кривой сигнала будет отличаться от ее формы на входе, так как для различных гармоник условия прохождения различны. Это же будет иметь место и при любом аperiodическом сигнале, так как такой сигнал может быть представлен в виде сплошного частотного спектра с помощью преобразования Фурье и для различных частот этого спектра условия прохождения вдоль линии будут различными.

Для линии связи чрезвычайно важно создание условий, при которых отсутствовало бы искажение формы передаваемого сигнала (тока и напряжения). Для этого необходимо, чтобы волновое сопротивление Z , коэффициент затухания α и фазовая скорость $v = \omega/\beta$ не зависели от частоты. Очевидно, при этом коэффициент фазы β должен быть пропорционален частоте. Такие условия оказываются выполненными, если соблюдено соотношение

$$\frac{r}{L} = \frac{g}{C}.$$

Действительно, при этом

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{r/L + j\omega}{g/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{LC} \sqrt{(r/L + j\omega)(g/C + j\omega)} = \\ &= \sqrt{LC}(r/L + j\omega) = \sqrt{r}g + j\omega\sqrt{LC}, \end{aligned}$$

т. е. удовлетворяются все вышеуказанные требования, необходимые для того, чтобы линия была неискажающей. Можно показать, что в этих условиях коэффициент затухания и коэффициент фазы имеют минимальные значения, т. е.

$$\alpha_{\min} = \sqrt{rg} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \omega\sqrt{LC}.$$

Соответственно, фазовая скорость при этом принимает максимальное значение $v_{\max} = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}$ и равна скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике, окружающем провода линии.

Для воздушных линий $z \approx 300 \dots 400$ Ом и $v \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Для кабельной линии $z \approx 50$ Ом и $v < 3 \cdot 10^8$ м/с, так как диэлектрическая проницаемость изоляции в кабеле больше диэлектрической проницаемости воздуха.

Длина волны $\lambda = v/f$ для воздушной линии при частоте 50 Гц оказывается равной 6000 км, т. е. обычно превосходит длину наиболее протяженных линий электропередачи. При звуковой частоте 5000 Гц длина волны $\lambda = 60$ км и, следовательно, на протяжении линии связи можно укладывать несколько длин волн. Это имеет место даже в сравнительно коротких линиях, применяемых в радиотехнических устройствах, вследствие высокой частоты.

Обычно в линиях $r/L > g/C$, так как проводимость утечки через изоляцию незначительна. Для достижения равенства $r/L = g/C$ увеличение проводимости нецелесообразно. Уменьшение r или C практически не представляется возможным. Поэтому в линиях связи искусственно увеличивают индуктивность, включая в линию через определенные расстояния особые реактивные катушки или применяя кабели, проводящие жилы которых обмотаны тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью.

Осуществив вышеуказанное соотношение между параметрами линии, получаем условие для передачи сигнала без искажений, но сигнал затухает по мере продвижения вдоль линии, так как $\alpha > 0$. В предельном случае, когда $r = 0$ и $g = 0$, получаем неискажающую линию без потерь, по которой сигнал передается не только без искажения, но и без затухания.

Для осуществления передачи сигналов без искажения, кроме соблюдения вышеуказанных условий, необходимо, чтобы отсутствовали отраженные волны от конца линии. Для этого, как было показано в предыдущем параграфе, сопротивление приемника должно быть равно волновому сопротивлению линии, т. е., как говорят, приемник и линия должны быть *согласованы*.

Если $Z_{\text{пр}} \neq Z$, то согласования можно добиться, включив между линией и приемником согласующее устройство. Таковым может быть, например, трансформатор с надлежаще выбранным коэффициентом трансформации. Осуществляют также согласование в начале линии генерирующего устройства и линии.

17.7. Однородная линия при различных режимах работы

В этом и следующем параграфах будем рассматривать режимы в однородной линии при различных значениях сопротивления приемника, т. е. при различных значениях отношения $\dot{U}_2$ к $\dot{I}_2$. В этом случае целесообразнее вести счет расстояний от конца линии, для чего во всех ранее использованных уравнениях достаточно заменить x на $l - x$. При этом $x = 0$ будет относиться к концу линии, а $x = l$ — к началу линии. В § 17.3 при счете расстояний от начала линий мы получили выражения для напряжения и тока в любой точке линии в виде

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{I} = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Заменяя в этих выражениях x на $l - x$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{U} &= A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x}; \\ \dot{I}Z &= A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} - A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x}, \end{aligned}$$

где положено $A_1 e^{-\gamma l} = A_3$ и $A_2 e^{\gamma l} = A_4$. В конце линии, т. е. теперь при $x = 0$, будет $\dot{U} = \dot{U}_2$ и $\dot{I} = \dot{I}_2$. Следовательно, для определения постоянных A_3 и A_4 имеем выражения $\dot{U}_2 = A_3 + A_4$ и $\dot{I}_2 Z = A_3 - A_4$, откуда $A_3 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)$; $A_4 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)$.

Таким образом, уравнения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$ получают вид

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)e^{-\gamma x}; \\ \dot{I} &= \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)e^{\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)e^{-\gamma x} \right]. \end{aligned}$$

Соответственно, эти уравнения, выраженные через гиперболические функции, имеют вид

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x.$$

Рассмотрим режим холостого хода. Условимся все величины в любой точке линии отмечать дополнительно индексом 0. Так как при холостом ходе $Z_{\text{пр}} = \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$, то

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20} \operatorname{ch} \gamma x; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{Z} \operatorname{sh} \gamma x.$$

Сопротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{Z}{\operatorname{th} \gamma l}.$$

На рис. 17.3 и 17.4 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{\text{пр}} = \infty$.

Характер распределения напряжения и тока вдоль линии хорошо иллюстрируется кривыми распределения квадратов их действующих значений. Для квадратов модулей комплексных величин $\operatorname{ch} \gamma x$ и $\operatorname{sh} \gamma x$ имеем

$$\begin{aligned} |\operatorname{ch} \gamma x|^2 &= |\operatorname{ch}^2(\alpha x + j\beta x)| = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x); \\ |\operatorname{sh} \gamma x|^2 &= |\operatorname{sh}^2(\alpha x + j\beta x)| = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$U_0^2 = \frac{1}{2} U_{20}^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x); \quad I_0^2 = \frac{U_{20}^2}{2Z^2} (\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

где z — модуль комплекса Z .

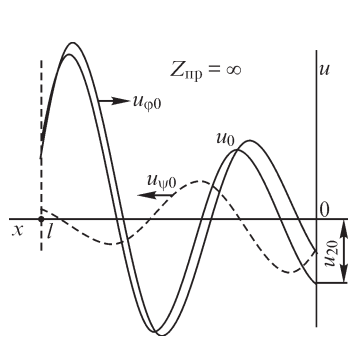


Рис. 17.3

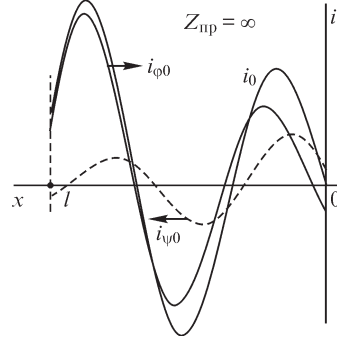


Рис. 17.4

Кривые $\text{ch } 2\alpha x$ и $\cos 2\beta x$, а также их сумма, характеризующая распределение U_0^2 , и их разность, характеризующая распределение I_0^2 , приведены на рис. 17.5.

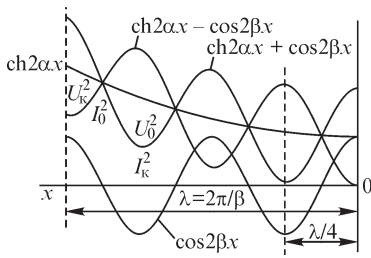


Рис. 17.5

Из этих кривых видно, что максимумы и минимумы как U_0 , так и I_0 чередуются приблизительно через четверть длины волны, причем максимумы U_0 сдвинуты относительно максимумов I_0 также почти на четверть длины волны. Из этих же кривых следует, что в линиях, длина которых не превышает четверти длины волны, при холостом ходе действующий ток убывает, а действующее напряжение, наоборот, возрастает в направлении от начала линии к ее концу.

Рассмотрим режим короткого замыкания. Условимся при этом все величины в любой точке линии отмечать дополнительным индексом «к». Так как при коротком замыкании $Z_{нр} = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$, то

$$\dot{U}_k = \dot{I}_{2k} Z \text{ sh } \gamma x; \quad \dot{I}_k = \dot{I}_{2k} \text{ ch } \gamma x.$$

Сопротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_k = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = Z \text{ th } \gamma l.$$

На рис. 17.6 и 17.7 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{нр} = 0$.

Для квадратов действующих напряжения U_k и тока I_k аналогично предыдущему найдем

$$U_k^2 = \frac{1}{2} I_{2k}^2 z^2 (\text{ch } 2\alpha x - \cos 2\beta x); \quad I_k^2 = \frac{1}{2} I_{2k}^2 (\text{ch } 2\alpha x + \cos 2\beta x).$$

Следовательно, при коротком замыкании распределение U_k^2 и I_k^2 вдоль линии характеризуется, соответственно, кривыми $(\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x)$ и $(\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x)$, приведенными на рис. 17.5.

Заметим, что, определив из опытов холостого хода и короткого замыкания $Z_0 = Z/\operatorname{th} \gamma l$ и $Z_k = Z \operatorname{th} \gamma l$, можно вычислить Z и γl , а именно

$$Z = \sqrt{Z_0 Z_k} \quad \text{и} \quad \operatorname{th} \gamma l = \sqrt{Z_k / Z_0}.$$

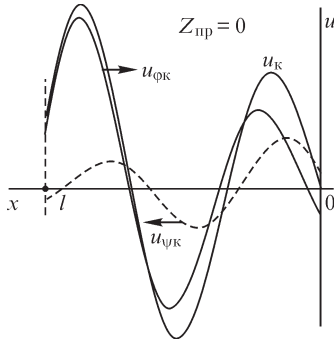


Рис. 17.6

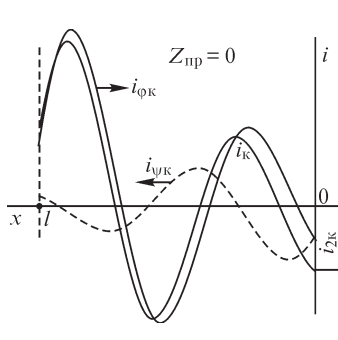


Рис. 17.7

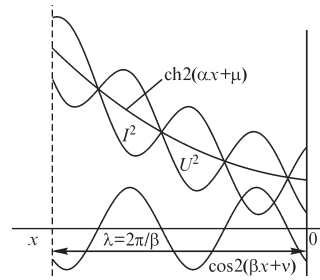


Рис. 17.8

Любой рабочий режим линии при замыкании ее на сопротивление $Z_{\text{пр}}$ может быть получен наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания. Выражения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$ в общем случае можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \left(\operatorname{ch} \gamma x + \frac{Z}{Z_{\text{пр}}} \operatorname{sh} \gamma x \right) = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{ch}(\gamma x + \sigma)}{\operatorname{ch} \sigma}; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \left(\operatorname{ch} \gamma x + \frac{Z_{\text{пр}}}{Z} \operatorname{sh} \gamma x \right) = \dot{I}_2 \frac{\operatorname{sh}(\gamma x + \sigma)}{\operatorname{sh} \sigma}, \end{aligned}$$

если принять $Z/Z_{\text{пр}} = \operatorname{th} \sigma = \operatorname{th}(\mu + j\nu)$, и, следовательно, U^2 и I^2 пропорциональны соответственно $\operatorname{ch} 2(\alpha x + \mu) + \cos 2(\beta x + \nu)$ и $\operatorname{ch} 2(\alpha x + \mu) - \cos 2(\beta x + \nu)$, где μ и ν зависят от соотношения между $Z_{\text{пр}}$ и Z . Поэтому кривые $U^2 = F_1(x)$, $I^2 = F_2(x)$ в этом случае (рис. 17.8) сходны с кривыми при $Z_{\text{пр}} = \infty$ и $Z_{\text{пр}} = 0$. Основное отличие состоит в том, что в конце линии $U_2 \neq 0$ и $I_2 \neq 0$.

17.8. Линии без потерь

В ряде случаев, в особенности при высоких частотах, когда $\omega L \gg r$ и $\omega C \gg g$, можно пренебречь наличием потерь в линии и принять $r = 0$ и $g = 0$. Тогда $\alpha = 0$, $\gamma = j\beta$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $Z = z = \sqrt{L/C}$ и многие соотношения, полученные ранее, упрощаются.

В случае холостого хода линии, когда $Z_{\text{пр}} = \infty$ и $I_2 = 0$, при счете расстояний от конца линии имеем

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20} \operatorname{ch} \gamma x = \dot{U}_{20} \cos \beta x; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{z} \operatorname{sh} \gamma x = j \frac{\dot{U}_{20}}{z} \sin \beta x.$$

Из этих выражений видно, что в рассматриваемом случае в результате наложения двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами получаются стоячие волны. Действительно, $\cos \beta x$ при $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2 \dots$ обращается в ± 1 , а $\sin \beta x$ — в нуль, и в соответствующих точках линии имеем пучности

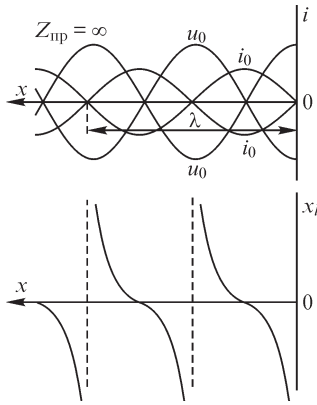


Рис. 17.9

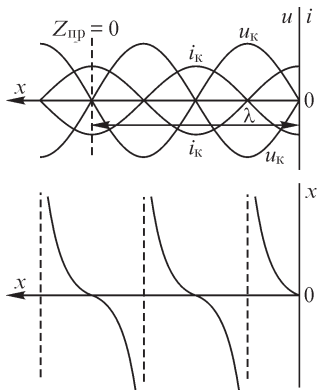


Рис. 17.10

напряжения и узлы тока. При $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4 \dots$ получаем узлы напряжения и пучности тока (рис. 17.9), так как тогда $\cos \beta x$ обращается в нуль, а $\sin \beta x$ — в ± 1 . Для входного сопротивления линии при холостом ходе Z_0 , обозначая длину линии через l , получим

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = -jz \operatorname{ctg} \beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \lambda/4$ имеет емкостный характер, при $\lambda/4 < l < \lambda/2$ — индуктивный характер и т. д. (рис. 17.9). При $l = \lambda/4, l = 3\lambda/4 \dots$ входное сопротивление разомкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \lambda/2, l = \lambda \dots$ оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

В случае короткого замыкания линии, когда $Z_{\text{пр}} = 0$ и $U_2 = 0$,

$$\dot{U}_k = \dot{I}_{2k} Z \operatorname{sh} \gamma x = j \dot{I}_{2k} z \sin \beta x; \quad \dot{I}_k = \dot{I}_{2k} \operatorname{ch} \gamma x = \dot{I}_{2k} \cos \beta x,$$

откуда видно, что и в этом случае имеем наложение двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами, в результате чего получаются стоячие волны. Все отличие от предыдущего случая состоит в том, что в конце линии будут узел напряжения и пучность тока (рис. 17.10). Для входного сопротивления короткозамкнутой линии Z_k имеем

$$Z_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = jz \operatorname{tg} \beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \lambda/4$ имеет индуктивный характер, при $\lambda/4 < l < \lambda/2$ — емкостный характер и т. д. (рис. 17.10). При $l = \lambda/2, l = \lambda \dots$ входное сопротивление короткозамкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \lambda/4, l = 3\lambda/4 \dots$ оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

При очень высоких частотах короткозамкнутая линия, длина которой равна четверти длины волны, применяется в качестве колебательного контура, имеющего вследствие относительно малых потерь весьма малое затухание. Такая ли-

ния практически обладает чрезвычайно большим входным сопротивлением, и это дает возможность использовать ее при малых длинах волн также для изоляции высокочастотных линий (рис. 17.11) вместо изоляторов, применение которых в этих случаях влечет за собой большие потери.

При реактивной нагрузке линии, когда $Z_{\text{нр}} = jx_{\text{нр}}$, имеем

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 \left(\cos \beta x + \frac{z}{x_{\text{нр}}} \sin \beta x \right) = \dot{U}_2 \frac{\sin(\beta x + \sigma)}{\sin \sigma}; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \left(\cos \beta x - \frac{x_{\text{нр}}}{z} \sin \beta x \right) = \dot{I}_2 \frac{\cos(\beta x + \sigma)}{\cos \sigma},\end{aligned}$$

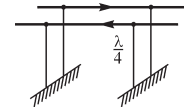


Рис. 17.11

если принять $x_{\text{нр}}/z = \tan \sigma$. Таким образом, и в данном случае получаются стоячие волны, но в конце линии при этом не будет ни пучности, ни узла (рис. 17.12). Для входного сопротивления линии, замкнутой на реактивное сопротивление,

$$Z_x = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{I}_{\text{вх}}} = jx_{\text{нр}} \frac{\tan(\beta l + \sigma)}{\tan \sigma} = jz \tan(\beta l + \sigma) = jx_l,$$

т. е. зависимость входного сопротивления линии от ее длины имеет такой же характер (рис. 17.12), как и в двух предыдущих случаях, причем для $l = \lambda/4$ и $l = \lambda/2$ найдем, соответственно, $Z_x = -z^2/(jx_{\text{нр}})$ и $Z_x = jx_{\text{нр}}$.

При $x_{\text{нр}} = z \cot \beta l$, когда $\sigma = \pm \pi/2 - \beta l$, $Z_x = \pm \infty$, и тогда линия эквивалентна короткозамкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны, а при $x_{\text{нр}} = -z \tan \beta l$, когда $\sigma = -\beta l$, $Z_x = 0$, и, следовательно, в этом случае линия эквивалентна разомкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны.

Таким образом, в зависимости от частоты приложенного напряжения, длины линии и оконечного сопротивления линия без потерь, замкнутая на реактивное сопротивление, представляет собой индуктивное или емкостное сопротивление, причем эквивалентная индуктивность или емкость могут иметь все значения в пределах от нуля до бесконечности. Возможность осуществить при помощи соответствующим образом подобранной линии индуктивное или емкостное сопротивление того или иного значения важно для практики при высоких частотах.

Итак, во всех трех рассмотренных случаях работы линии без потерь в ней получаются стоячие волны. При этом пучности напряжения и тока, а также узлы напряжения и тока сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны. Напряжение и ток в каждой точке линии различаются по фазе на четверть периода, и напряжение достигает максимального значения, когда ток во всей линии равен нулю, а ток достигает максимального значения, когда напряжение во всей линии равно нулю.

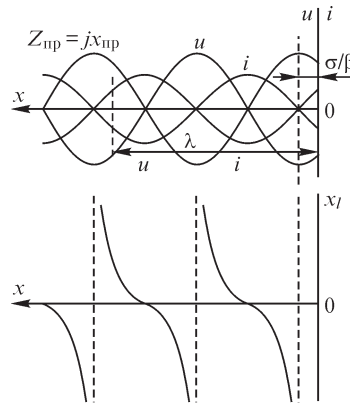


Рис. 17.12

Так как в любой момент времени в узлах напряжения $u = 0$, а в узлах тока $i = 0$, то в этих точках линии мощность всегда равна нулю, а энергия через эти точки не передается. Однако на каждом участке линии, ограниченном узлами напряжения и тока, происходит передача энергии вдоль линии, связанная с колебаниями энергии между электрическим и магнитным полями на этом участке.

Все три случая образования стоячих волн в линии, рассмотренные нами, характеризуются отсутствием расхода энергии как в линии, так и в приемнике. При наличии расхода энергии или в линии, или в приемнике в линии неизбежно должны существовать бегущие волны напряжения и тока, с которыми только и может быть связан процесс передачи энергии вдоль всей линии.

В заключение остановимся кратко на рассмотрении линии без потерь, имеющей длину, равную четверти длины волны, и замкнутой на активное сопротивление $r_{\text{пр}}$. В этом случае

$$\operatorname{ch} \gamma l = \cos \beta l = \cos \left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

а

$$\operatorname{sh} \gamma l = j \sin \beta l = j \sin \frac{\pi}{2} = j,$$

и имеем

$$\dot{U}_1 = j \dot{U}_2 \frac{z}{r_{\text{пр}}}; \quad \dot{I}_1 = j \dot{I}_2 \frac{r_{\text{пр}}}{z},$$

т. е. такую линию можно рассматривать как идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации, равным $z/r_{\text{пр}}$. Это весьма важное свойство дает возможность использовать линию, длина которой равна четверти длины волны, для согласования приемника с генератором или одной линии с другой линией. Так как входное сопротивление $Z_{\text{вх}}$ рассматриваемой линии равно

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{z^2}{r_{\text{пр}}},$$

то для согласования генератора и приемника, имеющих активные сопротивления $r_{\text{г}}$ и $r_{\text{пр}}$, или двух линий с такими же характеристическими сопротивлениями достаточно включить между ними линию, имеющую длину, равную четверти длины волны, и обладающую характеристическим сопротивлением $z = \sqrt{r_{\text{г}} r_{\text{пр}}}$.